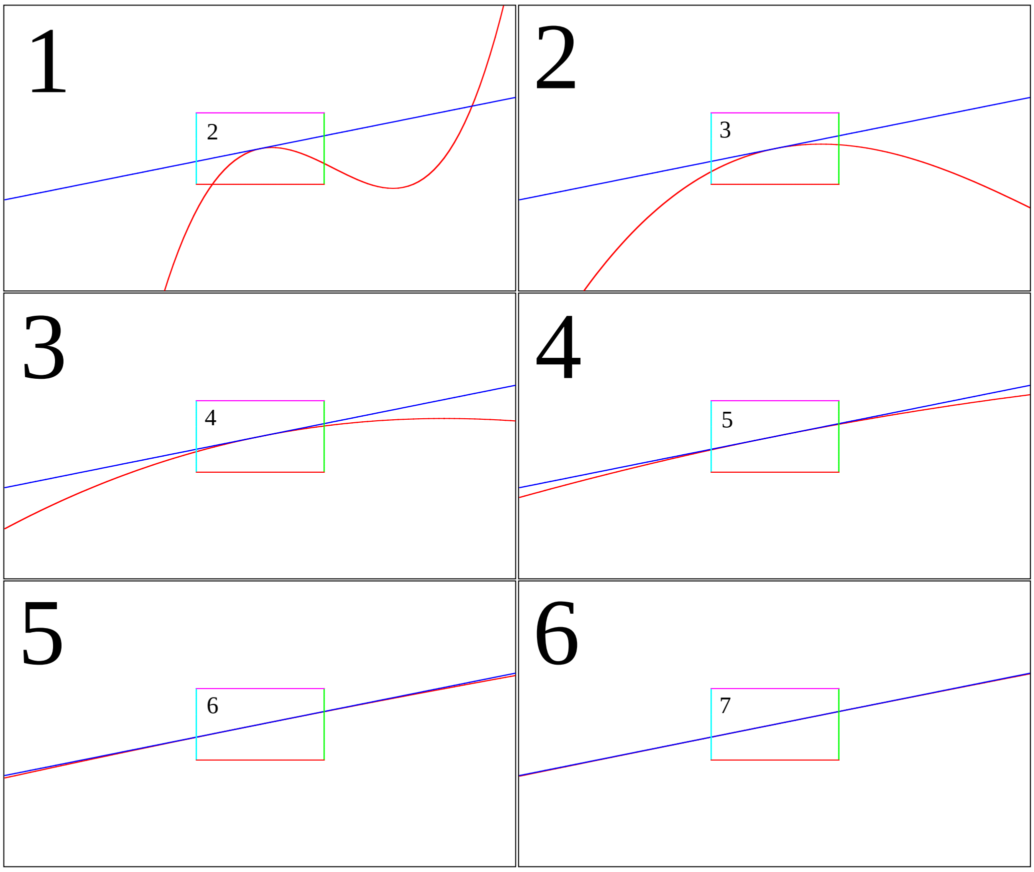
Hans Walser

Mathematatik für Naturwissenschaften
Aufgaben mit Ergebnissen



Differenzialrechnung

Inhalt

2003/04 Erstausgabe

last modified: 16. November 2003

Hans Walser
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel
www.math.unibas.ch/~walser
hwalser@bluewin.ch

1 Steigung

Was stimmt an dieser Verkehrstafel nicht?

Ergebnis

Die eingezeichnete Rampe hat einen Steigungswinkel von 30° und daher eine Steigung $\tan(30°) \approx 0.5774 = 57.74\% \neq 12\%$.

2 Beweis?

Es ist $(x^4)' = 4x^3$. Wie lässt sich dieser Sachverhalt beweisen?

Ergebnis

Analog Vorlesung

3 Spiel mit Exponenten

Gesucht ist je die erste Ableitung:

a) $f(t) = (\cos(t))^4$ b) $g(t) = \cos^4(t)$ c) $h(t) = \cos(t^4)$ d) $k(t) = \cos^4(t^4)$

Ergebnis

a) $f'(t) = 4(\cos(t))^3(-\sin(t))$

b) $g'(t) = 4\cos^3(t)(-\sin(t))$ (wie bei a))

c) $h'(t) = -\sin(t^4)4t^3$

d) $k'(t) = 16\cos^3(t^4)(-\sin(t^4))t^3$

4 Ableitung

Welches ist die erste Ableitung von

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $g(x) = \ln(\ln(x))$

c) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

Ergebnis

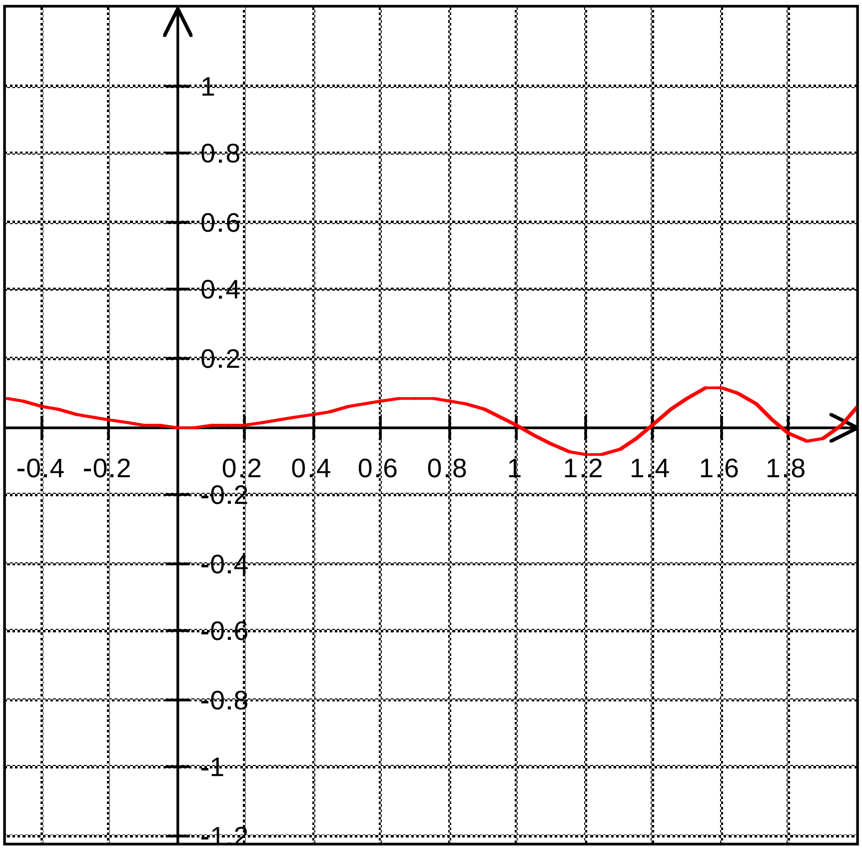
a) $f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \ln(\ln(x))$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{\ln(x)}\,\frac{1}{x}$

c) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ $\qquad$ $h'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))}\,\frac{1}{\ln(x)}\,\frac{1}{x}$

5 Skizze der Ableitung

Skizzieren Sie (ins gleiche Koordinatensystem) die Ableitungsfunktion der durch den Graphen gegebenen Funktion.



Ergebnis

—

6 Umkehrung der Ableitung?

Gesucht ist jeweils ein Beispiel einer Funktion $f(x)$ so, dass

a) $f'(x) = x^4$ $\qquad$ b) $f''(x) = x^4$ $\qquad$ c) $f'''(x) = x^4$ $\qquad$ d) $f'''(x) = (x^4)'$

Ergebnis

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$

b) $f(x)=\frac{1}{30}x^6+Cx+D$

c) $f(x)=\frac{1}{210}x^7+\frac{C}{2}x^2+Dx+E$

d) $f(x)=\frac{1}{210}x^7+\frac{C}{2}x^2+Dx+E$

7 Umkehrung der Ableitung?

Gesucht ist jeweils ein Beispiel einer Funktion $f(t)$ so, dass

a) $f'(t)=\sin(t)$ b) $f''(t)=\sin(t)$ c) $f'''(t)=\sin(t)$ d) $f'''(t)=\sin'(t)$

Ergebnis

a) $f(t)=-\cos(t)+C$

b) $f(t)=-\sin(t)+Ct+D$

c) $f(t)=\cos(t)+\frac{C}{2}t^2+Dt+E$

d) $f(t)=\cos(t)+\frac{C}{2}t^2+Dt+E$

8 Mehrfaches Ableiten. Formel von Leibniz

f'' bedeutet die *zweite* Ableitung von f, also $f''=(f')'$, entsprechend f''' die *dritte* Ableitung, $f^{(4)}$ die vierte Ableitung, usw.. (Beispiel: $f(x)=x^7$, $f'(x)=7x^6$, $f''(x)=42x^5$, $f'''(x)=210x^4$, $f^{(4)}(x)=840x^3$). Wie lautet die entsprechende Produktregel?

a) $(fg)'=$ b) $(fg)''=$ c) $(fg)'''=$ d) $(fg)^{(4)}=$ e) $(fg)^{(5)}=$

f) Kommentar?

Ergebnis

f) $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ (Formel von Leibniz, verwandt mit binomischer Formel)

9 Passende Funktionen gesucht

a) Gesucht ist ein Beispiel einer Funktion $f(x)$ so, dass $f'(x)=f(x)$.

b) Gesucht sind zwei verschiedene Funktionen $f(x)$ so, dass $f''(x)=-f(x)$.

c) Gesucht sind drei verschiedene Funktionen $f(x)$ so, dass $f^{(4)}(x)=f(x)$.

Ergebnis

a) $f(x)=ae^x$

b) $f(x)=a\cos(x)$, $f(x)=b\sin(x)$

c) $f(x)=a\cos(x)$, $f(x)=b\sin(x)$, $f(x)=ce^x$

10 Produktregel für mehrere Faktoren

Es ist $(fg)' = f'g + fg'$. Gesucht ist eine entsprechende Formel für

a) $(fgh)'$ b) $(fghi)'$ c) $(f^4)' = (ffff)'$ d) $(fgh)''$

Ergebnis

a) $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

b) $(fghi)' = f'ghi + fg'hi + fgh'i + fghi'$

c) $(f^4)' = (ffff)' = 4f^3 f'$ (Produktregel oder Kettenregel)

d) $(fgh)'' = f''gh + fg''h + fgh'' + 2\left(f'g'h + f'gh' + fg'h'\right)$

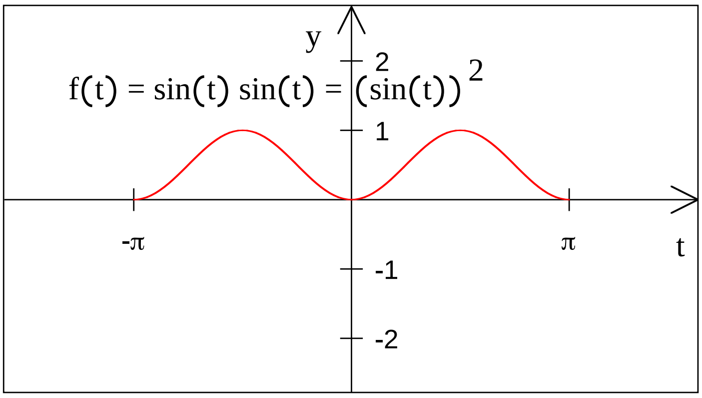
11 Zweimal Sinus

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(t)\sin(t)$; $t \in [-\pi, \pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

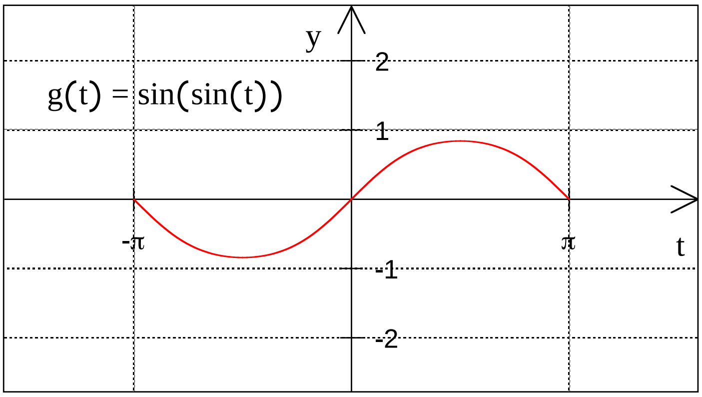
b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x) = \sin(\sin(t))$; $t \in [-\pi, \pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

Ergebnis

a)



b)



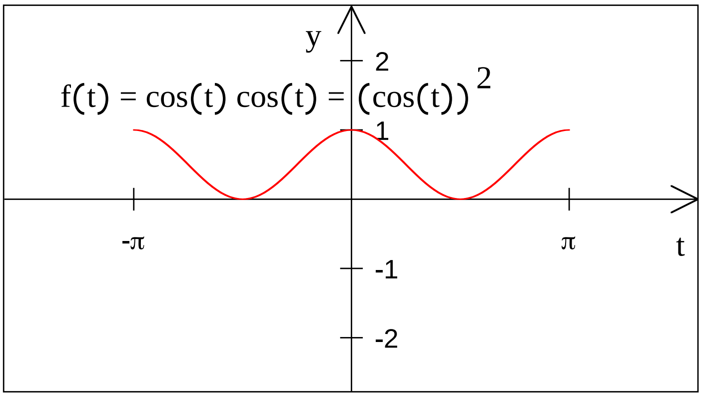
12 Zweimal Kosinus

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \cos(t)\cos(t) \quad ; \quad t \in [-\pi, \pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

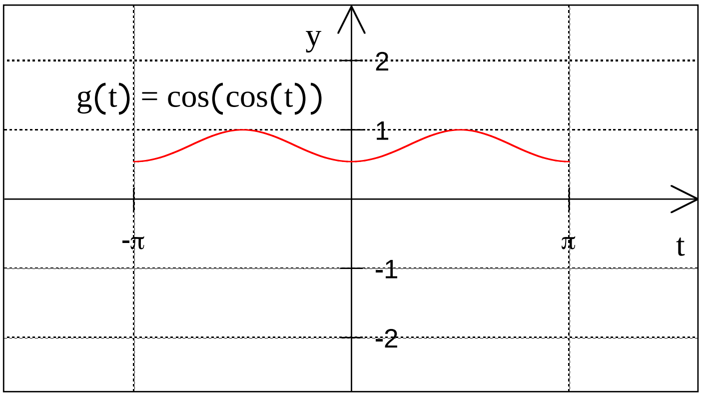
b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x) = \cos(\cos(t)) \quad ; \quad t \in [-\pi, \pi]$. (Erst überlegen, dann im Computer nachsehen!)

Ergebnis

a)



b)



13 Zusammensetzung von zwei Funktionen, Kettenregel

Es sei: $f : x \to x^2$ und $g : x \to \sin(x)$. Gesucht sind:

a) $(g \circ f)'$ b) $(f \circ g)'$

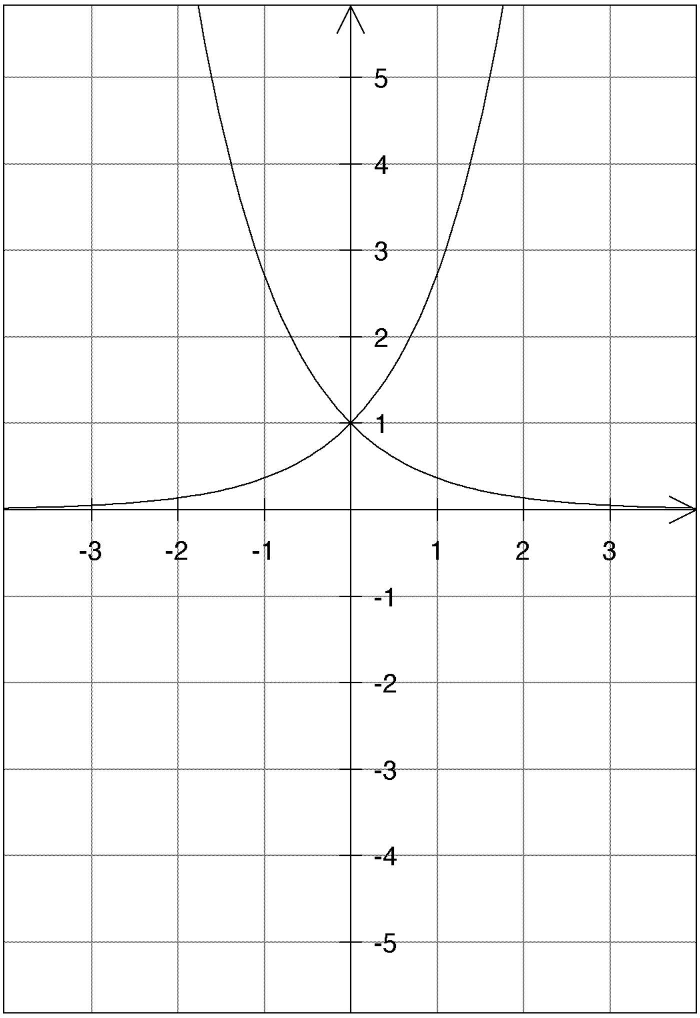
Ergebnis

14 Hyperbelfunktionen

Die Funktionen cosh (”cosinus hyperbolicus” oder ”hyperbolischer Kosinus”) und sinh (”sinus hyperbolicus” oder ”hyperbolischer Sinus”) sind wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

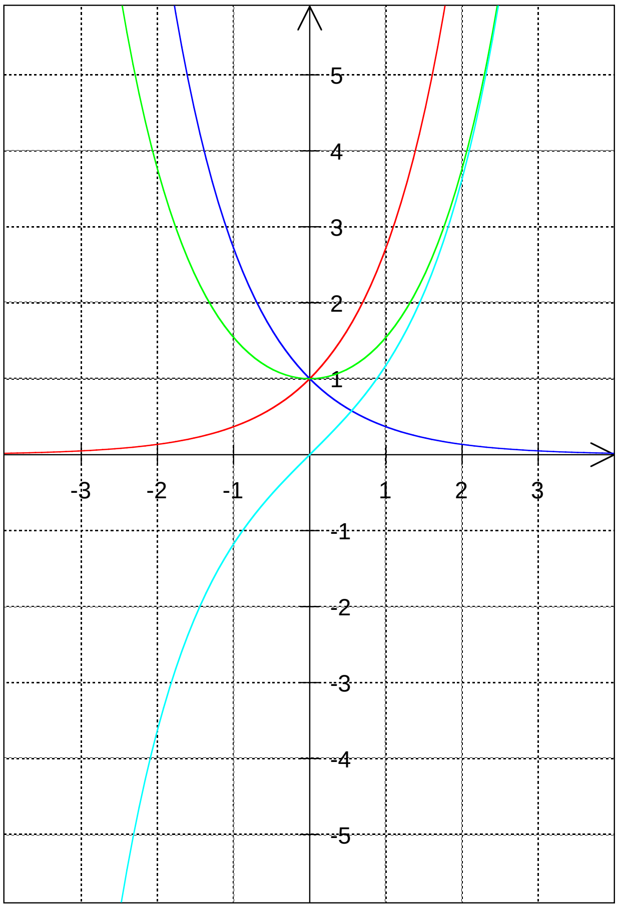
a) In der Figur sind die Funktionsgraphen von e^x und e^{-x} eingetragen. Skizzieren Sie dazu die beiden Funktionsgraphen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$.



Bemerkung: Der Funktionsgraph von $\cosh(x)$ wird als “Kettenlinie” bezeichnet.

b) Gesucht sind die Ableitungen $\cosh'$ und $\sinh'$. Kommentar?

Ergebnis

a) 

b) $\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh$

15 cosh und sinh

Die Funktionen cosh und sinh sind wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Gibt es eine zu $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ entsprechende Formel mit cosh und sinh?

Ergebnis

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

16 Hyperbolischer Tangens

Es ist $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

a) Skizze oder Plot des Funktionsgraphen?

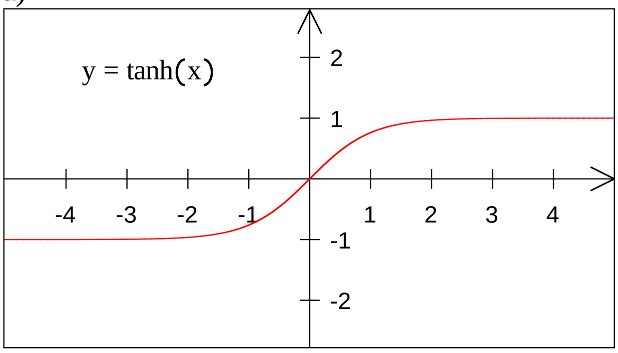
b) $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh(x) = ?$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = ?$

d) Ableitung von tanh?

Ergebnis

a)



b) $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$

d) $\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$

17 Spiel mit Exponenten

Gesucht ist je die erste Ableitung:

a) $f(t) = (\cos(t))^4$ b) $g(t) = \cos^4(t)$ c) $h(t) = \cos(t^4)$ d) $k(t) = \cos^4(t^4)$

Ergebnis

18 Zusammensetzung von drei Funktionen

Es sei: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \sqrt{x}$.

Wie viele Zusammensetzungen dieser drei Funktionen gibt es (Beispiele: $h \circ g \circ f$, $g \circ h \circ f$, …)? Listen Sie die Zusammensetzungen auf und geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich an.

Ergebnis

Es gibt 3! = 6 Zusammensetzungen, nämlich (Definitionsbereiche exemplarisch):

Definitionsbereich	Zusammensetzung
$\left[0,\sqrt{\pi}\right]$	$h\circ g\circ f=\sqrt{\sin\left(x^2\right)}$
$\mathbf{R}$	$h\circ f\circ g=\lvert\sin(x)\rvert$
$\mathbf{R}$	$g\circ h\circ f=\sin(\lvert x\rvert)$
$\mathbf{R}_0^+$	$g\circ f\circ h=\sin(x)$
$[0,\pi]$	$f\circ h\circ g=\sin(x)$
$\mathbf{R}_0^+$	$f\circ g\circ h=\sin^2\left(\sqrt{x}\right)$

19 Verallgemeinerte Kettenregel

Es sei: $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin(x)$ und $h(x)=\sqrt{x}$.

Wie viele Zusammensetzungen dieser drei Funktionen gibt es (Beispiele: $h\circ g\circ f$, $g\circ h\circ f$, …)? Listen Sie die Zusammensetzungen auf und geben Sie die im Definitionsbereich $[0,1]$ gültige Ableitung an.

Ergebnis

Definitionsbereich	Zusammensetzung	Ableitung
$[0,1]$	$h\circ g\circ f=\sqrt{\sin\left(x^2\right)}$	$\frac{x\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{\sin\left(x^2\right)}}$
$[0,1]$	$h\circ f\circ g=\sin(x)$	$\cos(x)$
$[0,1]$	$g\circ h\circ f=\sin(x)$	$\cos(x)$
$[0,1]$	$g\circ f\circ h=\sin(x)$	$\cos(x)$
$[0,1]$	$f\circ h\circ g=\sin(x)$	$\cos(x)$
$[0,1]$	$f\circ g\circ h=\sin^2\left(\sqrt{x}\right)$	$\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

20 Areafunktionen

a) arcosh ("area cosinus hyperbolicus") ist die Umkehrfunktion von cosh. Gesucht ist $\operatorname{arcosh}'(x)$.

b) Was ist $\operatorname{arsinh}'(x)$?

Ergebnis

a) $\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

21 Artanh

artanh ("area tangens hyperbolicus") ist die Umkehrfunktion von tanh. Gesucht ist $\operatorname{artanh}'(x)$.

Ergebnis

$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$