Potenzen

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}$ a ... Basis, n ... Exponent

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ n \in \mathbb{N}$

Folgende **Potenzgesetze** gelten für alle $m,n \in \mathbb{R}$ bei positiven reellen Basen. Für $m,n \in \mathbb{Z}$ gelten sie bei Basen aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

$\frac{1}{a^{-n}} = a^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Wurzeln

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \wedge b > 0$ a ... Radikand, n ... Wurzelexponent

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ $\qquad a \in \mathbb{R} \wedge a \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

Für Exponenten der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $n \neq 1$ und nichtnegativen reellen a, b können die Potenzgesetze auch als **Wurzelgesetze** formuliert werden:

$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Logarithmen

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ a ... Basis, b ... Numerus

$a^{\log_a b} = b \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$ $\qquad a \in \mathbb{R} \wedge a > 0 \wedge a \neq 1,\ b \in \mathbb{R} \wedge b > 0$

spezielle Basen:

$\log_{10} x = \lg x$ dekadischer Logarithmus (S. 40)

$\log_e x = \ln x$ natürlicher Logarithmus (S. 40)

Logarithmengesetze:

$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \qquad u,v \in \mathbb{R}$

$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v \qquad u,v > 0$

$\log_a u^r = r \log_a u \qquad r \in \mathbb{R}$

$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u \qquad n \in \mathbb{N}$

Basiswechsel:

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} = \frac{\ln b}{\ln c} = \frac{\lg b}{\lg c}$

$\lg x = M \ln x \qquad M = \lg e = 0{,}43429\ldots$

$\ln x = \frac{\lg x}{M} \qquad \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}30258\ldots$

$a^c = e^{c \cdot \ln a} \qquad c \in \mathbb{R}$