E 1 Das unbestimmte Integral

E 1.1 Die Begriffe *Stammfunktion* und *unbestimmtes Integral*

E 1.2 Regeln für das Ermitteln von unbestimmten Integralen

EA 1 Bestimmen Sie je eine Stammfunktion zu den Funktionen mit den folgenden Gleichungen und überprüfen Sie das Ergebnis durch Differentiation:[1)]

a) $f_1(x) = -4x$ b) $f_2(a) = 0{,}4a$ c) $f_3(a) = -5b$ d) $f_4(x) = 4x + 1$

e) $f_5(b) = -6(b - 3)$ f) $f_6(x) = (x - 1)(x + 1)$ g) $f_7(k) = 3k + x$ h) $f_8(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

i) $f_9(z) = \frac{3}{2\sqrt{z}}$ j) $f_{10}(p) = \frac{4}{3\sqrt[3]{p^2}}$ k) $f_{11}(x) = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2}$ l) $f_{12}(r) = \frac{ar^2 + a^2r}{r}$

m) $v(t) = g \cdot t$ n) $a(t) = g$ o) $f_{13}(x) = \sqrt{2}\,x^n$ p) $f_{14}(a) = a - \frac{1}{\sqrt{a}} + 2$

q) $f_{15}(x) = x^{2-k} + k$ r) $f_{16}(t) = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{3\sqrt{t}}$ s) $f_{17}(z) = (z^2 - 1) \cdot x$ t) $f_{18}(x) = x^2(x^2 - a)$

EA 2 Die Funktion F_i mit der nachfolgend angegebenen Gleichung sei jeweils Stammfunktion von Funktion f_i. Ermitteln Sie f_i!

a) $F_1(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x - \frac{1}{3x^3}$ b) $F_2(a) = \frac{3}{4}x^4 - ax$ c) $F_3(t) = \frac{5}{2}t^2 + 4t - \frac{1}{t^2}$

d) $F_4(x) = (a + x) \cdot (b + x)$ e) $F_5(s) = (1 - x) \cdot s$ f) $F_6(y) = \frac{x}{5}y^5 + \frac{1}{2}x^2y^2$

g) $F_7(x) = -\frac{1}{6x^6} - \frac{1}{3}x^{-3}$ h) $F_8(x) = \ln(2x + 1) + 4$ i) $F_9(x) = \frac{1}{3}\cos(3x - \frac{\pi}{2}) + 1$

EA 3 Überprüfen Sie, ob die nachfolgend angegebene Funktion F_i jeweils eine Stammfunktion von f_i ist:

a)	$F_1(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$	$f_1(x) = x(3x^4 - x + 2)$
b)	$F_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 7x$	$f_2(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + 7$
c)	$F_3(a) = x^5a - 3$	$f_3(a) = 5x^4a$
d)	$F_4(t) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}t$	$f_4(t) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$
e)	$F_5(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x + a$	$f_5(x) = (x - 4)(x + 3)$
f)	$F_6(d) = 2d^5 - 2d^4 + 3d^2 - 3d$	$f_6(d) = 10d^4 - 8d^3 + 6d$
g)	$F_7(x) = \frac{x^2 + 2}{3x}$	$f_7(x) = \frac{x^2 - 2}{3x^2}$
h)	$F_8(x) = \frac{x + 2}{3x^2}$	$f_8(x) = \frac{-x - 4}{3x^3}$
i)	$F_9(x) = 3e^{2x + 4}$	$f_9(x) = \frac{3}{2}e^{2x + 4}$
j)	$F_{10}(t) = (\sin t + \cos x)^2$	$f_{10}(t) = 2(\sin t + \cos x) \cdot \cos t$

[1)] Wir setzen hier und im Folgenden – wenn nicht anders vermerkt – stets voraus:
- Nenner $\neq 0$
- Basis von Potenzen mit gebrochenen Exponenten > 0

EA 10 Ermitteln Sie jeweils die Menge aller Stammfunktionen für die Funktionen f_i mit nachfolgenden Gleichungen:

a) $f_1(x) = \frac{1}{2} - 3x + 4x^3$ b) $f_2(a) = a^2x - \frac{a}{x}$ c) $f_3(t) = t - \frac{1}{\sqrt{t}} - 3$ d) $f_4(r) = (r + \frac{1}{r})(r - \frac{1}{r})$

e) $f_5(x) = 4x(x^2 - 5)$ f) $f_6(s) = ax + as - 3$ g) $f_7(b) = ab + ax$ h) $f_8(x) = x^3 - 3x^2 - x$

i) $f_9(h) = \frac{3}{ch^2}$ j) $f_{10}(r) = (r - 1)(r + 1)$ k) $f_{11}(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + t$ l) $f_{12}(x) = 2x^{10} - 5x^4$

m) $f_{13}(x) = \frac{3}{ax^n}$ n) $f_{14}(t) = \frac{1}{2t^2}$ o) $f_{15}(a) = a^{-1 + 2n}$ p) $f_{16}(a) = \frac{x^7}{4} - \frac{x}{a^3}$

EA 12 Ermitteln Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int (x^2 - 1)dx$ b) $\int at\,dt$ c) $\int (x^2 + 3x + 1)dx$

d) $\int (\sqrt{a} - x\sqrt{b})dx$ e) $\int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$ f) $\int (x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})dx$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ h) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + 4)dx$ i) $\int (\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2})dx$

j) $\int (ab + b^4)db$ k) $\int (t - 2)^2 dt$ l) $\int \frac{12dx}{5x^5}$

EA 13 Ermitteln Sie mit dem GTA die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (5x^2 + 2)^4 dx$ b) $\int \sqrt{x^2 + 2}\,dx$ c) $\int 3x^2 \cdot \sqrt{2x^2 - 1}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$ e) $\int k \cdot (k^2 + k)^4 dk$ f) $\int (\sqrt[3]{x} - (2x + 1)^6)dx$

g) $\int (\sqrt{2a} + 2a)^3 da$ h) $\int (v^2 - \sqrt{v})^4 dv$ i) $\int (\frac{x^2 + 1}{x^4})^3 dx$

EA 14 Bestimmen Sie den Integranden in folgenden Gleichungen:

a) $\int f_1(x)dx = 7x^2 - c$ b) $\int f_2(x)dx = \frac{-1}{\sqrt{x}} + b$ c) $\int f_3(x)dx = \sqrt{x} + a$

d) $\int f_4(a)da = \sqrt{x} + a$ e) $\int f_5(t)dt = t^{-5} + 2t^2 - c$ f) $\int f_6(x)dx = ax + c$

g) $\int f_7(b)db = b^2 + 2b + c$ h) $\int f_8(x)dx = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + c$ i) $\int f_9(x)dx = \frac{x}{\pi} - \pi$

j) $\int f_{10}(s)ds = 7s^3 - \frac{s^2}{4} + c$ k) $\int f_{11}(x)dx = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ l) $\int f_{12}(x)dx = \sqrt{x} + a$

EA 15

a) Beweisen Sie die Summenregel für unbestimmte Integrale (Satz E 4, Teil 2)!
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Gültigkeit dieser Summenregel für n Summanden (n > 2)!

EA 16 Stellen Sie die Funktionen $F_1(x) = -x^2$, $F_2(x) = -x^2 + 1$, $F_3(x) = -x^2 - 1$ und $F_4(x) = -x^2 + 3$ grafisch dar! Zeigen Sie, dass die Tangenten in Punkten mit demselben Abszissenwert x bei allen vier Graphen parallel zueinander verlaufen und den Anstieg $f(x) = -2x$ besitzen!

EA 17 Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Stammfunktion von $f(x) = 2x - 3$, die an der Stelle -1 den Funktionswert $\frac{9}{2}$ hat!

EA 18 Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f_i, welche die angegebene Bedingung erfüllt!

a) $f_1(x) = x^2 + 3$ $F_1(1) = 4$ b) $f_2(x) = \frac{x}{10}$ $F_2(0) = 4$

c) $f_3(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ $F_3(1) = \frac{3}{5}$ d) $f_4(x) = \sqrt[4]{x}$ $F_4(1) = \frac{4}{5}$

EA 38 Berechnen Sie unter Anwendung von Definition E 5 und E 6 sowie Satz E 7:

a) $\int_c^d (x-c)^2\,dx + \int_d^c x^2\,dx - c\int_c^d (-2x+c)\,dx$

b) $\int_{-2}^{3} (2x+4)\,dx - 2\cdot\int_7^4 (x+2)\,dx - \frac{1}{2}\cdot\int_4^3 (4x+8)\,dx$

EA 39 Berechnen Sie – auf möglichst günstige Weise – die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_1^1 x\,dx$ b) $\int_0^0 t^7\,dt$ c) $\int_0^x b\,db$ d) $\int_{-3}^{-3} (a^2+a+2)\,da$

e) $\int_\pi^\pi x^2\,dx$ f) $\int_b^0 x\,dx$ g) $\int_0^b z\,dz$ h) $\int_0^0 (x^4+1)\,dx$

i) $\int_1^3 (x^2+1)\,dx + \int_3^1 (x^2+1)\,dx$ j) $\int_2^5 (\frac{1}{x}+2)\,dx + \int_5^2 (\frac{1}{x}+2)\,dx$

k) $\int_1^4 x\,(x^2+x+1)\,dx + \int_4^7 (x^3+x^2+x)\,dx + \int_7^1 (x^3+x^2+x)\,dx$

l) $\int_0^1 x^3\,dx - \int_3^1 x^3\,dx + \int_3^5 x^3\,dx$

EA 40 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit dem GTA:

a) $\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} x\,dx$ b) $\int_{-3}^1 2x^3\,dx$ c) $\int_2^3 \frac{4}{a^2}\,da$ d) $\int_1^2 5x\sqrt{x}\,dx$

e) $\int_0^2 \sqrt{5}\,x\,dx$ f) $\int_1^8 \frac{4}{x^5}\,dx$ g) $\int_0^a ab\,db$ h) $\int_2^3 \frac{1}{2t^2}\,dt$

i) $\int_1^6 \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\,dx$ j) $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{s^5}\,ds$

EA 44 Ermitteln Sie jeweils das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze!

a) $\Phi(x) = \int_0^x \frac{2t}{3}\,dt$ b) $\Phi(a) = \int_0^a 2x^3\,dx$

EA 45 Ermitteln Sie für nachfolgende Integrale die Integralfunktion:

a) $\int_0^a dx$ b) $\int_0^x (-3)\,da$ c) $\int_0^t (ax^2+bx+c)\,dx$ d) $\int_0^x (2+v^3+v^4+v^5)\,dv$

e) $\int_0^c k\cdot\frac{1}{x^5}\,dx$ f) $\int_0^a \frac{x^3-x^2+4}{x^2}\,dx$ g) $\int_0^x (a-1)\,(a+1)\,da$ h) $\int_0^x (\frac{2}{z^4}-\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^6})\,dz$

i) $\int_0^t x\cdot x^{-4}\,dx$ j) $\int_0^a \frac{w^4}{z^2}\,dz$ k) $\int_0^x \frac{t}{10}\,dt$ l) $\int_0^a x^n\,dx$

EA 46 Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

a) $\int_a^x (2t-\frac{t^2}{2})\,dt$ b) $\int_2^b (a-2)^2\,da$