Drachenviereck BE

Gegeben sind die Punkte $A(3|-1|2)$, $B(7|2|11)$, $C(3|3|14)$ und $D(-1|2|11)$ und die Gerade g durch

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

a) Entwickeln Sie für die Ebene E, die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist, je eine Gleichung in Parameterform und in Normalenform.

[*Zur Kontrolle:* E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$] 7

b) Weisen Sie nach, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen und Eckpunkte eines Drachenvierecks mit der Symmetrieachse AC sind. 6

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Drachenvierecks ABCD.
Das Drachenviereck ABCD rotiert um seine Symmetrieachse. Es entsteht ein Doppelkegel. Berechnen Sie sein Volumen. 8

d) Weisen Sie nach, dass die Gerade g und die Ebene E einen Schnittpunkt haben. Untersuchen Sie, ob dieser Schnittpunkt auf der Diagonalen $\overline{AC}$ des Drachenvierecks liegt. 5

e) Das Drachenviereck beschreibt einen realen Drachen, wobei eine Längeneinheit im Modell für 10 cm in der Wirklichkeit steht. Der Drachen steigt um ca. 30 m. Seine Eckpunkte befinden sich nun in $A'(3|-27|308)$, $B'(7|-18|311)$, $C'(3|-15|312)$ und $D'(-1|-18|311)$. Bei diesem Steigungsvorgang hat sich der Drachen gedreht. Begründen Sie, dass er sich um die Achse BD gedreht hat. 4

30

Pavillon

BE

Gegeben sind die Punkte $A(13{,}5\,|\,9\,|\,6)$, $B(4{,}5\,|\,9\,|\,6)$ und $S(9\,|\,6\,|\,12)$ und die Ebene E_1 durch E_1: $4x + 3z = 72$.

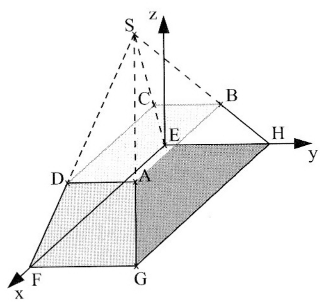
a) Ermitteln Sie für die Ebene E_2, die durch die Punkte A, B und S festgelegt ist, eine Gleichung in Parameter- und eine in Koordinatenform und geben Sie einen Normalenvektor für E_2 an.
[*Zur Kontrolle:* E_2: $2y + z = 24$] 6

b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

die Schnittgerade von E_1 und E_2 ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G, in dem die Gerade g die x-y-Ebene durchstößt. 8

Auf dem Ausstellungsgelände einer Gartenschau soll ein Informationspavillon in Form eines Pyramidenstumpfes gebaut werden (siehe Abbildung). Die rechteckige Grundfläche des Pavillons ist durch die Punkte $E(0\,|\,0\,|\,0)$, $F(18\,|\,0\,|\,0)$, $G(18\,|\,12\,|\,0)$ und $H(0\,|\,12\,|\,0)$ gegeben.
In den Ebenen E_1 bzw. E_2 liegt je eine Seitenfläche des Pavillons (1 LE = 1 m).



c) Die Dachfläche mit den Eckpunkten $A(13{,}5\,|\,9\,|\,6)$, $B(4{,}5\,|\,9\,|\,6)$, $C(4{,}5\,|\,3\,|\,6)$ und $D(13{,}5\,|\,3\,|\,6)$ soll als Aussichtsplattform genutzt werden. Der Architekt plant eine Außentreppe auf der in E_1 liegenden Seitenfläche FGAD. Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Treppe, der durch die Neigung der Ebene E_1 gegenüber der Grundfläche gegeben ist, nicht größer als 30° sein.
Untersuchen Sie, ob diese Treppe gebaut werden darf. 5

d) Abends soll der Pavillon von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden.
Für die Beleuchtung der Seitenfläche GHBA wird im Punkt $P(9\,|\,25\,|\,0)$ ein senkrechter Mast errichtet, an dem der Scheinwerfer angebracht wird. Das Licht der als punktförmig angenommenen Lichtquelle soll senkrecht im Punkt $M(9\,|\,10\,|\,4)$ auf die Seitenfläche GHBA auftreffen, damit die Seitenfläche möglichst gut ausgeleuchtet wird.
Berechnen Sie, in welcher Höhe der Scheinwerfer am Mast befestigt werden muss. 7

e) Zwischen Pavillon und Lichtmast soll im Punkt $Q(9\,|\,y\,|\,0)$ eine 9 m hohe Fahnenstange so aufgestellt werden, dass der vom Scheinwerfer ausgehende und zu GHBA senkrechte Lichtstrahl noch ungehindert auf den Punkt M trifft.
Bestimmen Sie das Intervall für die Werte der y-Koordinate von Q. 4

30

Flugbahnen

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

sowie die Ebene

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ k, \ell \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der x-y-Ebene und geben Sie dessen Abstand zum Koordinatenursprung an. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g mit der x-y-Ebene. 9

b) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und der x-y-Ebene. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden h zur Ebene E. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Durchstoßpunkt der Geraden h durch die Ebene E. 12

c) Die Flugbahn eines Airbus lässt sich mit der Gleichung der Geraden h und die einer Boeing mit der Gleichung der Geraden g beschreiben. Entscheiden Sie, ob die beiden Flugzeuge kollidieren könnten. 5

d) Bei der Flugsicherung auf Flughäfen wird ständig dafür gesorgt, dass die Flugzeuge jederzeit einen Mindestabstand zueinander einhalten. Die Boeing befindet sich im Punkt $P(-4\,|\,3\,|\,2)$. Bestimmen Sie den Abstand zur Flugbahn h des Airbus. (1 LE = 1 km) 4

30