

1. Beschreibung der Schwingung eines mechanischen Oszillators

- Ein Körper schwingt an einer Feder mit $A = 5 \text{ cm}$ und $f = 2 \text{ Hz}$.
 - Stelle $s(t)$ für $s(0)=A$, $v(0)=0$ auf und berechne $s(t)$ für $t = 0 \text{ s}$, 0.25 s , 0.50 s , 0.75 s .
 - Berechne $v(t)$ und $a(t)$ zu diesen Zeitpunkten. c) Bestimme Phasenwinkel $\phi(t)$ (rad) und ordne Quadranten im Phasenportrait (s, v) zu. d) Mittlere Geschwindigkeit und mittlere Betragsgeschwindigkeit auf $[0, 0.75] \text{ s}$.
- Ein Federpendel vollführt in 15 s genau 30 Schwingungen.
 - Bestimme f und T . b) Berechne ω und skizziere $s(t)$ für $A = 5 \text{ cm}$.
 - Phasenänderung nach 7.25 s in Grad. d) Relativer Fehler (%) in f , wenn in 15 s statt 30 nur 29.9 Perioden gezählt werden.
- Feder $D = 40 \text{ N/m}$, Dehnung $x = 3 \text{ cm}$.
 - Potentielle Energie berechnen.
 - Wie gross ist die zusätzliche Dehnung bei +10 % Energie?
 - Zwei identische Federn parallel: effektive Federkonstante und Energie bei gleicher x .
 - Warum versagt die lineare Näherung bei grossen Dehnungen? Kurz erläutern.
- Masse $m = 0.5 \text{ kg}$, Feder $D = 50 \text{ N/m}$.
 - Schwingungsdauer T (ungedämpft) berechnen. b) v_{max} für $A = 5 \text{ cm}$.
 - Zeitpunkte der Gleichverteilung $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ in der ersten Periode.
 - Änderung von T bei Neigung der Feder um 30° (kleine Auslenkung).
- $A = 0.05 \text{ m}$, $f = 1.6 \text{ Hz}$.
 - v_{max} und a_{max} . b) Zeiten in der ersten Periode mit $|a(t)| = a_{\text{max}}/2$. c) v an Nulldurchgängen der Auslenkung. d) Mittlere potentielle Energie ueber eine Periode.
- Reibung: Amplitude halbiert sich nach 10 Schwingungen.
 - Logarithmisches Dekrement δ . b) Dämpfungskoeffizient β und Q . c) Anzahl Schwingungen bis $A/10$. d) Prozentualer Energieverlust pro Periode.

2. Zusammenhang zwischen Frequenz und Periodendauer

- Lautsprecher $f = 500 \text{ Hz}$.
 - T berechnen. b) Phasenänderung nach 1.25 ms . c) Zahl der Schwingungen in 3.6 s .
 - Unsicherheit in T bei Frequenzfehler $\pm 2 \text{ Hz}$.
- Stimmgabel $T = 2.0 \text{ ms}$.
 - f berechnen. b) ω angeben.
 - $s(t)$ für $A = 3 \text{ mm}$, $s(0)=0$, $v(0)>0$. d) Zeitpunkt der ersten Erreichung von $s = 1.5 \text{ mm}$.
- Maschine $f = 15 \text{ Hz}$.
 - Schwingungen in 2 min . b) Zeitpunkte des 100., 1000. und 1500. Maximums.
 - Prozentualer Fehler in der Zählrate, wenn Zeitmessung um 0.5 s daneben liegt.
 - Einfluss linearer Frequenzdrift von $+0.02 \text{ Hz pro Minute}$.
- Uhr mit Pendel $T = 2.0 \text{ s}$.
 - Schwingungen pro Stunde. b) Phasenverschiebung nach 15 min (rad).
 - Zeitfehler pro Tag, wenn T um 0.5% zu gross ist.
 - Zugehörige relative Längenveränderung $\Delta l / l$.
- Ultraschallquelle $f = 2.0 \text{ MHz}$.
 - Dauer einer Schwingung. b) Dauer von 1000 Perioden. c) Phasenwinkel nach $0.8 \text{ microsekunden}$. d) Zahl der Schwingungen in 2.5 ms .
- Zwei Töne $f_1 = 440 \text{ Hz}$, $f_2 = 442 \text{ Hz}$.
 - Schwebungsfrequenz. b) Zeit zwischen zwei Lautstärke-Maxima.
 - Schreibe $s(t) = 2 A \cos(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \sin(2 \pi \cdot f_{\text{mittel}} \cdot t)$; identifiziere f_{mittel} und Δf .
 - Zeitpunkt, an dem beide Signale wieder in Phase sind.

3. Periodendauer eines Fadenpendels

- $l = 0.50 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.
 - T berechnen (kleine Winkel). b) f und ω angeben.
 - Abschätzung: relativer Fehler durch Amplitude $\theta_0 = 10^\circ$ (erste Korrektur).
 - Änderung von T bei $g = 9.83 \text{ m/s}^2$.

2. T soll um 10 % kleiner werden.
a) l_{neu} in Abhängigkeit von l . b) Δl in %. c) Prüfe per Taylor-Näherung in l .
d) Messbarkeit bei 1 mm Genauigkeit.
3. Gegeben $T = 1.5$ s.
a) l bestimmen. b) l für $g_{\text{Mond}} = 1.62 \text{ m/s}^2$. c) Welche Änderung von l für $T = 1.4$ s (Erde)?
d) ΔT für $\Delta l = \pm 5$ mm (Differentialansatz).
4. Zwei Pendel $l_1 = 0.60$ m, $l_2 = 0.65$ m.
a) f_1 , f_2 und $|f_1 - f_2|$. b) Schwebungszeit der Hülle. c) Zeitpunkt erneuter Gleichphasigkeit.
d) Welche L -Änderung an l_2 ergibt $f_2 = f_1$?
5. Sekundenpendel $T = 2.0$ s.
a) l berechnen. b) Änderung von T bei $\Delta l = 1$ mm. c) Welches Δl erzeugt 10 s/Tag Gangfehler? d) Einfluss einer Änderung von g um -0.3 %.
6. Mond: $g = 1.62 \text{ m/s}^2$.
a) Verhältnis $T_{\text{Mond}} / T_{\text{Erde}}$ für gleiches l . b) Für $l = 0.50$ m: T_{Mond} . c) l für $T = 2.0$ s am Mond. d) Kommentar: Messbarkeit bei sehr kleiner Reibung.

4. Zeitabhängige Auslenkung bei harmonischen Schwingungen

1. $A = 4$ cm, $f = 2$ Hz, $\phi_0 = 0$.
a) $s(t)$ sowie $v(t)$ und $a(t)$ angeben. b) $s(0.125 \text{ s})$ und $v(0.125 \text{ s})$ berechnen.
c) Qualitative Skizze der Verläufe über eine Periode. d) $s(t)$ auch in Kosinusform mit Phase.
2. Gleiche Schwingung mit $s(0)=0$, $v(0)>0$.
a) Welche Phase ist zu setzen. b) $s(t)$ mit dieser Phase.
c) Zeitpunkt des ersten Erreichens $s = 2$ cm.
d) Phasenlage relativ zu 1).
3. $s(t) = 0.04 \cdot \sin(4 \pi t + \pi/3)$.
a) $s(0.25 \text{ s})$ berechnen. b) A , f , ω bestimmen. c) Erste drei Nullstellen $s(t)=0$ für $t>0$.
d) Zeitpunkte maximal positiver Auslenkung in $[0, 1]$ s.
4. $s(t) = 0.05 \cdot \cos(10 t)$.
a) v_{max} und a_{max} . b) Zeitpunkte in einer Periode mit $|a| = a_{\text{max}}/2$. c) Sinusdarstellung mit passender Phase. d) Mittlere kinetische Energie pro Periode bei $m = 0.2$ kg.
5. $A = 6$ cm, $T = 0.8$ s, $\phi_0 = \pi/2$.
a) $s(t)$ als Sinus und als Kosinus. b) $v(t)$, $a(t)$. c) Zeitpunkt erstes Maximum und erster Nulldurchgang. d) Phasenraumkurve (s, v): Gleichung und Achsenschnittpunkte.
6. $A = 0.02$ m, $f = 5$ Hz.
a) Erste Nullstelle von $s(t)$ (Start $s(0)=A$, $v(0)=0$). b) Zweite Nullstelle. c) $|v|$ beim ersten Nulldurchgang. d) Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima von $|v|$.

5. Energieumwandlung bei harmonischer Schwingung

1. $m = 0.20$ kg, $D = 50$ N/m, $A = 4$ cm.
a) Gesamtenergie E . b) v_{max} . c) E_{kin} und E_{pot} bei $s = A / \sqrt{2}$. d) Mittlere E_{kin} pro Periode.
2. Bei $s = A/2$:
a) E_{pot} und E_{kin} relativ zu E . b) $|v|$ an diesem Ort. c) Zwei Zeitpunkte in der ersten Periode mit $s = A/2$. d) Energieverteilung bei $s = -A/2$ (Vergleich).
3. $v_{\text{max}} = 0.4$ m/s bei $A = 0.05$ m.
a) ω und (D/m) aus $v_{\text{max}} = \omega \cdot A$. b) Masse m für $D = 16$ N/m.
c) v_{max} für $A = 0.06$ m. d) E für Fall (b).
4. $m = 0.3$ kg, $E = 0.12$ J.
a) Amplitude A für $D = 12$ N/m. b) Änderung von A bei $+25$ % Energie. c) ω und v_{max} .
d) E_{kin} und E_{pot} bei $s = 0.6 A$.
5. Pro Periode 1 % Energieverlust.
a) Periodenanzahl bis 50 % Rest. b) Periodenanzahl bis 10 % Rest.
c) Logarithmisches Dekrement der Amplitude ($E \sim A^2$). d) Q-Faktor (Näherung).

6. $b = 0.05 \text{ kg/s}$, $m = 0.2 \text{ kg}$, $D = 5 \text{ N/m}$.
a) Ungedämpfte ω_0 und Energie bei $A = 5 \text{ cm}$. b) $\beta = b/(2m)$ und $\omega_{\text{dämpft}}$.
c) Zeitkonstante des Energieabfalls. d) Energie nach 10 s vs. ungedämpfter Fall.
-

5. Dämpfung einer Schwingung (Begriff „Dämpfung“ hier rein symbolisch; Rechnungen bleiben ASCII)

- $A(t) = A_0 \cdot \exp(-\beta t)$ mit $\beta = 0.15 \text{ 1/s}$, $A_0 = 5 \text{ cm}$.
a) $A(10 \text{ s})$. b) Anzahl Perioden ($f = 2 \text{ Hz}$) bis $A < 1 \text{ cm}$. c) $E(10 \text{ s}) / E_0$.
d) δ pro Periode.
 - Nach 8 s gilt $A = 0.25 \cdot A_0$.
a) β . b) δ bei $f = 1.6 \text{ Hz}$. c) Zeit bis $A_0/10$. d) Zeit bis Energie $= 0.10 \cdot E_0$.
 - $m = 0.5 \text{ kg}$, $D = 10 \text{ N/m}$, $b = 0.5 \text{ kg/s}$.
a) ω_0 , β , $\omega_{\text{dämpft}}$. b) Amplitudenabnahme nach 5 Perioden.
c) Klassifikation: unter-, kritisch- oder over-damped? Begründung. d) Q .
 - Energieabfall auf $1/e$.
a) Beziehung zwischen β und Energie-Zeitkonstante. b) $t_E = 1/(2\beta)$.
c) Unterschied zu $t_A = 1/\beta$. d) Zahlenbeispiel $\beta = 0.2 \text{ 1/s}$.
 - Nach 5 Perioden ist $A = 70 \%$.
a) δ . b) β für $f = 2 \text{ Hz}$. c) A nach 20 Perioden (in %). d) Energie nach 20 Perioden (in %).
 - Kritische Dämpfung: $b_{\text{krit}} = 2 \cdot \sqrt{m \cdot D}$.
a) b_{krit} für $m = 0.2 \text{ kg}$, $D = 5 \text{ N/m}$. b) Relativer Abstand von b aus 6.3 zu b_{krit} .
c) Welche Änderung von D macht das System kritisch?
d) Zeitantwort: unter-/kritisch-/over-damped (qualitativ).
-

6. Erzwungene Schwingung und Resonanz

- $m = 0.4 \text{ kg}$, $D = 10 \text{ N/m}$, $b = 0.5 \text{ kg/s}$, Anregung $f = 0.8 \text{ Hz}$.
a) Eigenfrequenz f_0 und Vergleich mit f . b) ω_0 , β , $\omega_{\text{dämpft}}$.
c) Phasenlage relativ zur Anregung (unter/über Resonanz).
d) Relativer Amplitudenfaktor $|H(\omega)|$ um ω_0 (qualitativ).
- $f_{\text{res}} = (1/(2\pi)) \cdot \sqrt{D/m - b^2/(2m^2)}$, mit $m = 0.5 \text{ kg}$, $D = 20 \text{ N/m}$, $b = 1 \text{ kg/s}$.
a) f_{res} berechnen. b) f_0 bestimmen und Vergleich $f_{\text{res}} < f_0$.
c) Bandbreite $\Delta f \sim b / (2\pi m)$. d) Q -Faktor.
- Resonanzamplitude 8 cm, bei halber Frequenz 3 cm.
a) Qualitative Begründung über Betrag der Übertragungsfunktion.
b) Phasenverschiebung bei halber Frequenz (Vorzeichen, Lage).
c) Rolle der Reibung für die Werte 8 cm vs. 3 cm.
d) Qualitative Bode-Amplitude (Achsen benennen).
- Ged. Oszillator: $f_0 = 2 \text{ Hz}$, $b = 0.4 \text{ kg/s}$, $m = 0.25 \text{ kg}$.
a) β und ω_0 . b) Frequenz f_{max} maximaler Amplitude (Resonanzbedingung).
c) Halbwertsbreite (Schätzung). d) Phasenverschiebung bei $f = f_{\text{max}}$.
- Feder-Masse: $m = 0.25 \text{ kg}$, $D = 4 \text{ N/m}$, sinusförmige Kraft $F_0 = 0.5 \text{ N}$.
a) Formale Resonanzamplitude ohne Reibung. b) Stationäre Resonanzamplitude mit $b = 0.2 \text{ kg/s}$.
c) Mittlere zugeführte Leistung bei Resonanz. d) Praktische Begrenzung durch Nichtlinearitäten.
- Maschine: Resonanz bei 12 Hz, $m = 25 \text{ kg}$.
a) Federkonstante D . b) Resonanzfrequenz bei +20 % in D . c) Welche b reduziert Resonanzamplitude um Faktor 3 (stationär)?
d) Empfehlung: Frequenz-, Steifigkeits-, Reibungs-Tuning zur Resonanzvermeidung.

LÖSUNGEN

1. Beschreibung der Schwingung eines mechanischen Oszillators

- $s(t) = A \cdot \cos(2\pi f t)$, $A = 0.05 \text{ m}$, $f = 2 \text{ Hz}$ Formel: $s(t) = A \cos(2\pi f t)$
Rechnung: $s(0) = 0.05 \cos(0) = +0.05$; $s(0.25) = 0.05 \cos(2\pi \cdot 0.25) = 0.05 \cos(\pi) = -0.05$;
 $s(0.50) = 0.05 \cos(2\pi) = +0.05$; $s(0.75) = 0.05 \cos(3\pi) = -0.05$
Ergebnis: $s(0) = +0.05 \text{ m}$; $s(0.25) = -0.05 \text{ m}$; $s(0.50) = +0.05 \text{ m}$; $s(0.75) = -0.05 \text{ m}$
- 30 Schwingungen in 15 s Formeln: $f = N/t$; $T = 1/f$ Rechnung: $f = 30/15 = 2 \text{ Hz}$; $T = 1/2 = 0.5 \text{ s}$
- Federenergie bei Dehnung $x = 0.03 \text{ m}$, $D = 40 \text{ N/m}$ Formel: $E = (1/2) D x^2$
Rechnung: $E = 0.540(0.03)^2 = 20 \cdot 0.0009 = 0.018 \text{ J}$ Ergebnis: $E = 0.018 \text{ J}$
- Schwingungsdauer bei $m = 0.5 \text{ kg}$, $D = 50 \text{ N/m}$ Formel: $T = 2\pi \sqrt{m/D}$ Rechnung: $T = 2\pi \sqrt{0.5/50} = 2\pi \sqrt{0.01} = 2\pi \cdot 0.1 = 0.628 \text{ s}$ Ergebnis: $T = 0.628 \text{ s}$
- $v_{\max}$ und $a_{\max}$ bei $A = 0.05 \text{ m}$, $f = 1.6 \text{ Hz}$ Formeln: $\omega = 2\pi f$; $v_{\max} = \omega A$; $a_{\max} = \omega^2 A$
Rechnung: $\omega = 2\pi \cdot 1.6 = 10.053 \text{ rad/s}$; $v_{\max} = 10.053 \cdot 0.05 = 0.503 \text{ m/s}$; $a_{\max} = 10.053^2 \cdot 0.05 = 5.053 \text{ m/s}^2$ E: $v_{\max} = 0.503 \text{ m/s}$; $a_{\max} = 5.05 \text{ m/s}^2$

(Anmerkung: Wenn $f = 2 \text{ Hz}$ wäre, gäbe es $v_{\max} = 0.628 \text{ m/s}$ und $a_{\max} = 7.90 \text{ m/s}^2$. Hier gilt aber $f = 1.6 \text{ Hz}$.)

- Amplitude halbiert sich nach 10 Perioden F: $\delta = (1/n) \cdot \ln(A_0/A_n)$ Rechnung: $\delta = (1/10) \cdot \ln(2) = 0.0693147$

2. Kenngrößen einer Schwingung, Zusammenhang f und T

- $f = 500 \text{ Hz}$ Formel: $T = 1/f$ Rechnung: $T = 1/500 = 0.002 \text{ s}$ Ergebnis: $T = 0.002 \text{ s}$
- $T = 0.002 \text{ s}$ Formel: $f = 1/T$ Rechnung: $f = 1/0.002 = 500 \text{ Hz}$ Ergebnis: $f = 500 \text{ Hz}$
- $f = 15 \text{ Hz}$, $t = 120 \text{ s}$ Formel: $N = f t$ Rechnung: $N = 15 \cdot 120 = 1800$ Ergebnis: 1800 Schwingungen
- $T = 2 \text{ s}$ Formeln: $f = 1/T$; $N_{\text{pro Stunde}} = f \cdot 3600$ Rechnung: $f = 0.5 \text{ Hz}$; $N = 0.5 \cdot 3600 = 1800$ Schw. pro Stunde
- $f = 2.0 \text{ MHz}$ Formel: $T = 1/f$ Rechnung: $T = 1/(2.0 \cdot 10^6) = 5.0 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0.5 \mu\text{s}$ Ergebnis: $T = 0.5 \mu\text{s}$
- $f_1 = 440 \text{ Hz}$, $f_2 = 442 \text{ Hz}$ Formel: $f_{\text{schweb}} = |f_2 - f_1|$ Rechnung: $f_{\text{schweb}} = 2 \text{ Hz}$ Ers: Schwebungsfrequenz = 2 Hz

3. Periodendauer eines Fadenpendels ($T = 2\pi \sqrt{l/g}$)

- $l = 0.50 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ Formel: $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ Rechnung: $T = 2\pi \sqrt{0.50/9.81} = 2\pi \cdot 0.2258 = 1.418 \text{ s}$
Ergebnis: $T = 1.418 \text{ s}$
- T soll um 10 % kleiner werden Formeln: $T \sim \sqrt{l} \rightarrow (T'/T)^2 = l'/l$ Rechnung: $T' = 0.9T \rightarrow l' = (0.9)^2 l = 0.81l$
(Verkürzung 19 %) Ergebnis: $l' = 0.81l$; Verkürzung = 19 %
- $T = 1.5 \text{ s}$ Formel: $l = g \cdot (T/(2\pi))^2$ Rechnung: $l = 9.81 \cdot (1.5/6.2832)^2 = 9.81 \cdot (0.2387)^2 = 9.81 \cdot 0.0570 = 0.559 \text{ m}$
- $l_1 = 0.60 \text{ m}$, $l_2 = 0.65 \text{ m}$ Formeln: $f = 1/T = 1/(2\pi \sqrt{l/g})$ Rechnung: $f_1 = 0.644 \text{ Hz}$; $f_2 = 0.619 \text{ Hz}$; $\Delta f = 0.025 \text{ Hz}$ (gerundet) Ergebnis: $f_1 = 0.644 \text{ Hz}$; $f_2 = 0.619 \text{ Hz}$; $\Delta f = 0.025 \text{ Hz}$
- $T = 2.0 \text{ s}$ Formel: $l = g \cdot (T/(2\pi))^2$ Rechnung: $l = 9.81 \cdot (2.0/6.2832)^2 = 9.81 \cdot (0.3183)^2 = 0.993 \text{ m}$
- Mond ($g_{\text{mond}} = 1.62 \text{ m/s}^2$) Formel: $T \sim 1/\sqrt{g} \rightarrow T_{\text{mond}} = T_{\text{erde}} \sqrt{g_{\text{erde}}/g_{\text{mond}}}$
Rechnung: $\sqrt{9.81/1.62} = 2.462$ Ergebnis: $T_{\text{mond}} = 2.46 T_{\text{erde}}$

4. Gleichung für zeitabhängige Auslenkung

- $A = 0.04 \text{ m}$, $f = 2 \text{ Hz}$ Formel: $s(t) = A \sin(2\pi f t)$ Antwort: $s(t) = 0.04 \sin(4\pi t)$
- Anfangsauslenkung 0, positive Anfangsgeschwindigkeit Formel: $s(0)=0$, $v(0)>0 \rightarrow s(t) = A \sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi f$
Antwort: $s(t) = A \sin(2\pi f t)$
- $s(t) = 0.04 \sin(4\pi t + \pi/3)$, $t = 0.25 \text{ s}$ Formel: $s(t)$ direkt einsetzen. Rechnung: $\text{Argument} = 4\pi \cdot 0.25 + \pi/3 = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$; $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2 = -0.8660$ $s = 0.04 \cdot (-0.8660) = -0.03464 \text{ m}$ Ergebnis: $s(0.25 \text{ s}) = -0.0346 \text{ m}$
- $s(t) = 0.05 \cos(10t)$
Formeln: $v_{\max} = \omega A$; $a_{\max} = \omega^2 A$ ($\omega = 10 \text{ rad/s}$) Rechnung: $v_{\max} = 100 \cdot 0.05 = 5.0 \text{ m/s}$; $a_{\max} = 1000 \cdot 0.05 = 50.0 \text{ m/s}^2$ Ergebnis: $v_{\max} = 5.0 \text{ m/s}$; $a_{\max} = 50.0 \text{ m/s}^2$
- $A = 0.06 \text{ m}$, $T = 0.8 \text{ s}$, $\phi_0 = \pi/2$ Formeln: $f = 1/T = 1.25 \text{ Hz}$; $\omega = 2\pi f = 7.85398 \text{ rad/s}$
Antwort: $s(t) = 0.06 \sin(7.854t + \pi/2)$ (gleichwertig auch Kosinusform möglich)
- $f = 5 \text{ Hz}$, Start $s(0)=A$, $v(0)=0$ Formel: $s(t) = A \cos(2\pi f t) \rightarrow$ erster Nullpunkt bei $t = T/4 = 1/(4f)$
Rechnung: $1/(4 \cdot 5) = 0.05 \text{ s}$ Ergebnis: erster Nulldurchgang $t = 0.05 \text{ s}$

5. Energieumwandlung harmonische Schwingung

- $m = 0.20 \text{ kg}$, $D = 50 \text{ N/m}$, $A = 0.04 \text{ m}$ Formeln: $E = (1/2) D A^2$; $\omega = \sqrt{D/m}$; $v_{\max} = \omega A$
Rechnung: $E = 0.550 \cdot (0.04)^2 = 250.0016 = 0.040 \text{ J}$ $\omega = \sqrt{50/0.20} = \sqrt{250} = 15.811 \text{ rad/s}$
 $v_{\max} = 15.811 \cdot 0.04 = 0.632 \text{ m/s}$ Ergebnis: $E = 0.040 \text{ J}$; $v_{\max} = 0.632 \text{ m/s}$
 - bei $s = A/2$ Formeln: $E_{\text{pot}} = (1/2) D (A/2)^2 = (1/8) D A^2 = (1/4) E$; $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{pot}}$
Rechnung: $E_{\text{pot}} = 0.25E$; $E_{\text{kin}} = 0.75E$ Ergebnis: $E_{\text{pot}} = 1/4 E$; $E_{\text{kin}} = 3/4 E$
 - $v_{\max}$ bekannt, A bekannt (Masse fehlt) Formeln: $v_{\max} = \omega A \rightarrow \omega = v_{\max}/A$; $D = m\omega^2 = m \cdot (v_{\max}/A)^2$ Antwort: $D/m = (v_{\max}/A)^2$ (ohne m keine absolute D -Zahl)
 - Amplitude aus Energie Formel: $E = (1/2) D A^2 \rightarrow A = \sqrt{2E/D}$ Antwort: $A = \sqrt{2E/D}$ (ohne D keine Zahl)
 - 1 % Energieverlust pro Periode Formel: $E_n = E_0 \cdot (0.99)^n$; Bedingung $E_n/E_0 = 0.5 \rightarrow (0.99)^n = 0.5$
Rechnung: $n = \ln(0.5)/\ln(0.99) = 68.97$ Ergebnis: $n = 69$ Perioden (gerundet)
 - $m = 0.2 \text{ kg}$, $b = 0.05 \text{ kg/s}$ Formeln: $\beta = b/(2m)$; Amplitude $\sim \exp(-\beta t)$; Energie $\sim \exp(-2\beta t)$;
 $\tau_E = 1/(2\beta) = m/b$ Rechnung: $\tau_E = 0.2/0.05 = 4.0 \text{ s}$ Ergebnis: Energie-Zeitkonstante $\tau_E = 4.0 \text{ s}$
-

6. Dämpfung einer Schwingung

- $A(t) = A_0 \exp(-\beta t)$, $\beta = 0.15 \text{ 1/s}$, $A_0 = 5 \text{ cm}$ Formel: $A(t) = A_0 \exp(-\beta t)$ Rechnung: $A(10 \text{ s}) = 5 \exp(-1.5) = 50.22313 = 1.1157 \text{ cm}$ Ergebnis: $A(10 \text{ s}) = 1.12 \text{ cm}$ (gerundet)
 - $A(8 \text{ s}) = 0.25 A_0$ Formel: $0.25 = \exp(-\beta t) \rightarrow \beta = -(1/t) \cdot \ln(0.25) = (1/8) \cdot \ln(4)$ Rechnung: $\beta = 0.1733 \text{ 1/s}$
 - $m = 0.5 \text{ kg}$, $D = 10 \text{ N/m}$, $b = 0.5 \text{ kg/s}$ Formeln: $\omega_0 = \sqrt{D/m}$; $\beta = b/(2m)$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $f_d = \omega_d/(2\pi)$ Rechnung: $\omega_0 = \sqrt{10/0.5} = \sqrt{20} = 4.472 \text{ rad/s}$; $\beta = 0.5/(1.0) = 0.5 \text{ 1/s}$;
 $\omega_d = \sqrt{20 - 0.25} = \sqrt{19.75} = 4.444 \text{ rad/s}$; $f_d = 4.444/(2\pi) = 0.707 \text{ Hz}$
Ergebnis: $\omega_0 = 4.472 \text{ rad/s}$; $\beta = 0.5 \text{ s}^{-1}$; $\omega_d = 4.444 \text{ rad/s}$; $f_d = 0.707 \text{ Hz}$
 - Energieabfall auf $1/e$ Formeln: $E(t) = E_0 \exp(-2\beta t)$; $E(t_E) = E_0/e \rightarrow 2\beta t_E = 1 \rightarrow t_E = 1/(2\beta)$
Beispiel: $\beta = 0.5 \rightarrow t_E = 1.0 \text{ s}$ Ergebnis: $t_E = 1/(2\beta)$ (z. B. 1.0 s für $\beta = 0.5$)
 - Nach 5 Perioden $A = 0.70 \cdot A_0$ Formel: $\delta = (1/n) \cdot \ln(A_0/A_n)$ Rechnung: $\delta = (1/5) \cdot \ln(1/0.70) = 0.0713$
 - Kritische Dämpfung Formel: $b_{\text{krit}} = 2\sqrt{mD}$ Rechnung: $m = 0.2$, $D = 5 \rightarrow b_{\text{krit}} = 2\sqrt{1.0} = 2.00 \text{ kg/s}$
-

7. Erzwungene Schwingung und Resonanz

- $m = 0.4 \text{ kg}$, $D = 10 \text{ N/m}$, $b = 0.5 \text{ kg/s}$, $f = 0.8 \text{ Hz}$ Formeln: $f_0 = (1/(2\pi))\sqrt{D/m}$ Rechnung: $f_0 = (1/(2\pi))\sqrt{10/0.4} = (1/(2\pi))\sqrt{25} = 5/(2\pi) = 0.796 \text{ Hz}$ Ergebnis: $f_0 = 0.796 \text{ Hz}$ (nahe bei $f = 0.8 \text{ Hz}$)
- $m = 0.5 \text{ kg}$, $D = 20 \text{ N/m}$, $b = 1 \text{ kg/s}$ Formel: $f_{\text{res}} = (1/(2\pi))\sqrt{D/m - b^2/(2m^2)}$ Rechnung: $D/m = 40$; $b^2/(2m^2) = 1/(20.25) = 0.02$; unter Wurzel: 38 ; $f_{\text{res}} = (1/(2\pi))\sqrt{38} = 0.981 \text{ Hz}$ Ergebnis: $f_{\text{res}} = 0.981 \text{ Hz}$
- Resonanzamplitude 8 cm , bei halber Frequenz 3 cm (qualitativ)
Formel (Qualitativ): $|H(\omega)| = 1/\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_0)^2}$
Erklärung: Bei Resonanz maximiert, bei halber Frequenz kleiner; Dämpfung bestimmt Höhe/Breite.
- Frequenz maximaler Amplitude (gedämpft) Formel: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, $\beta = b/(2m)$, $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ Antwort: allgemeine Formel angegeben (Einsatz je nach Parametern)
- $m = 0.25 \text{ kg}$, $D = 4 \text{ N/m}$, $F_0 = 0.5 \text{ N}$ Formeln: $\omega_0 = \sqrt{D/m} = \sqrt{16} = 4 \text{ rad/s}$;
 A_{res} (ohne Reibung, formal) $\rightarrow$ unendlich; mit Reibung: $A_{\text{res}} \sim F_0/(b\omega_0)$
Antwort: $A_{\text{res}} \sim F_0/(b\omega_0)$; bei $b = 0.2 \text{ kg/s}$: $A_{\text{res}} = 0.5/(0.2 \cdot 4) = 0.625 \text{ m}$
- Resonanz bei $f = 12 \text{ Hz}$, $m = 25 \text{ kg}$ Formeln: $f_0 = (1/(2\pi))\sqrt{D/m} \rightarrow D = (2\pi f_0)^2 \cdot m$
Rechnung: $D = (2\pi \cdot 12)^2 \cdot 25 = (24\pi)^2 \cdot 25 = 5681 \cdot 25 = 1.42010^5 \text{ N/m}$ Ergebnis: $D \approx 1.42 \cdot 10^5 \text{ N/m}$