

Grundlegende Funktionen der Wirtschaftsmathematik

Kosten-, Erlös-, Gewinn-, Produktions- und
Konsumfunktionen mit ihren Ableitungen

Symbol	Bezeichnung	Symbol	Bezeichnung
$K(x)$	Gesamtkostenfunktion	$K'(x)$	Grenzkostenfunktion
$k(x)$	Stückkostenfunktion	$k'(x)$	Grenzstückkostenfunktion
$K_v(x)$	Variable Kostenfunktion	$K_v'(x)$	Variable Grenzkostenfunktion
$k_v(x)$	Variable Stückkostenfunktion	$k_v'(x)$	Grenzfunktion der variablen Stückkosten
$E(x)$	Erlösfunktion	$E'(x)$	Grenzerlösfunktion
$G(x)$	Gewinnfunktion	$G'(x)$	Grenzgewinnfunktion
$DB(x)$	Deckungsbeitragsfunktion	$DB'(x)$	Grenzdeckungsbeitragsfunktion
$db(x)$	Stückdeckungsbeitragsfunktion	$db'(x)$	Grenzstückdeckungsbeitragsfunktion
$C(Y)$	Konsumfunktion	$C'(Y)$	Marginale Konsumquote
$S(Y)$	Sparfunktion	$S'(Y)$	Marginale Sparquote
$x(r)$	Produktionsfunktion	$x'(r)$	Grenzproduktivitätsfunktion
$\emptyset P(r)$	Durchschnittsproduktivitätsfunktion	$\emptyset P'(r)$	Grenz-Durchschnittsproduktivität

Kurzbeschreibung der verwendeten ökonomischen Funktionen

$K(x)$ – Gesamtkostenfunktion

Beschreibt die gesamten Kosten eines Unternehmens in Abhängigkeit von der produzierten Menge. Sie setzt sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen.

$K'(x)$ – Grenzkostenfunktion

Gibt an, um welchen Betrag die Gesamtkosten steigen oder sinken, wenn eine zusätzliche Mengeneinheit produziert wird.

$k(x)$ – Stückkostenfunktion

Zeigt die durchschnittlichen Kosten je produzierter Mengeneinheit.

$k'(x)$ – Grenzstückkostenfunktion

Beschreibt die Veränderung der Stückkosten bei einer zusätzlichen Produktionseinheit.

$K_v(x)$ – Variable Kostenfunktion

Erfasst ausschließlich die von der Produktionsmenge abhängigen Kosten.

$K_v'(x)$ – Variable Grenzkostenfunktion

Zeigt die Veränderung der variablen Kosten bei einer zusätzlichen Produktionseinheit.

$k_v(x)$ – Variable Stückkostenfunktion

Gibt die durchschnittlichen variablen Kosten pro Mengeneinheit an.

$k_v'(x)$ – Grenzfunktion der variablen Stückkosten

Beschreibt die Veränderung der variablen Stückkosten je zusätzlicher Mengeneinheit.

$E(x)$ – Erlösfunktion

Beschreibt die gesamten Verkaufserlöse in Abhängigkeit von der Absatzmenge.

$E'(x)$ – Grenzerlösfunktion

Gibt an, wie stark sich der Erlös durch den Verkauf einer weiteren Einheit verändert.

G(x) – Gewinnfunktion

Beschreibt den Unternehmenserfolg als Differenz zwischen Erlösen und Kosten.

G'(x) – Grenzgewinnfunktion

Zeigt die Gewinnänderung bei Produktion und Verkauf einer zusätzlichen Einheit.

DB(x) – Deckungsbeitragsfunktion

Gibt den Betrag an, der nach Abzug der variablen Kosten zur Deckung der Fixkosten und zur Gewinnerzielung zur Verfügung steht.

DB'(x) – Grenzdeckungsbeitragsfunktion

Beschreibt die Veränderung des Deckungsbeitrags durch eine zusätzliche Mengeneinheit.

db(x) – Stückdeckungsbeitragsfunktion

Zeigt den Deckungsbeitrag je verkaufter Einheit.

db'(x) – Grenzstückdeckungsbeitragsfunktion

Beschreibt die Veränderung des Stückdeckungsbeitrags bei einer zusätzlichen Einheit.

C(Y) – Konsumfunktion

Beschreibt den Zusammenhang zwischen Einkommen und Konsumausgaben eines Haushalts.

C'(Y) – Marginale Konsumquote

Gibt an, welcher Anteil eines zusätzlichen Einkommens für Konsum verwendet wird.

S(Y) – Sparfunktion

Beschreibt den Teil des Einkommens, der nicht konsumiert, sondern gespart wird.

S'(Y) – Marginale Sparquote

Gibt an, welcher Anteil eines zusätzlichen Einkommens gespart wird.

x(r) – Produktionsfunktion

Beschreibt den Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz (Input) und erzeugter Produktionsmenge (Output).

x'(r) – Grenzproduktivitätsfunktion

Zeigt die zusätzliche Produktionsmenge, die durch eine weitere Einheit des Produktionsfaktors entsteht.

 $\bar{O}P(r)$ – Durchschnittsproduktivitätsfunktion

Gibt den durchschnittlichen Output je eingesetzter Inputeinheit an.

 $\bar{O}P'(r)$ – Grenz-Durchschnittsproduktivität

Beschreibt die Veränderung der Durchschnittsproduktivität bei einer zusätzlichen Inputeinheit.

Gemeinsame ökonomische Bedeutung

Die dargestellten Funktionen dienen der Analyse von:

- **Kostenverhalten** (Kostenrechnung)
- **Absatz und Erlöse** (Preistheorie)
- **Gewinnmaximierung**
- **Deckungsbeitragsrechnung**
- **Produktivität und Produktion**
- **Konsum- und Sparverhalten**
- **Marginalanalysen (Grenzbetrachtungen)**

Sie bilden die mathematische Grundlage vieler Entscheidungen in der Betriebswirtschaftslehre (BWL), Volkswirtschaftslehre (VWL) und Wirtschaftsmathematik.

Wirtschaftsmathematische Analyse

ökonomischer Funktionen

Berechnung und Interpretation von Grenzgrößen,
Durchschnittsgrößen und Elastizitäten

Fixkosten K_f

Math: $K_f = K(0)$ – Konstante, unabhängig von x .

Ökon: Kosten, die unabhängig vom Output anfallen – Miete, Gehälter, Maschinen.

Variable Kostenfunktion $K_v(x)$

Math: $K_v(x) = K(x) - K(0)$ – K ohne konstantes Glied.

Ökon: Kosten, die mit dem Output steigen – Rohstoffe, Energie, Löhne.

Stückkostenfunktion $k(x)$

Math: $k(x) = K(x)/x$ – Division der Gesamtkosten durch Output.

Ökon: Durchschnittliche Gesamtkosten pro produzierter Einheit.

Variable Stückkostenfunktion $k_v(x)$

Math: $k_v(x) = K_v(x)/x$ – Division der variablen Kosten durch Output.

Ökon: Variable Kosten pro Stück ohne Fixkostenanteil. Minimum = Betriebsminimum.

Grenzkostenfunktion $K'(x)$

Math: $K'(x) = dK/dx$ – 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion.

Ökon: Kosten der letzten produzierten Einheit. Minimum = Wendepunkt der Kostenkurve.

Grenzkosten variabel $K'_v(x)$

Math: $K'_v(x) = dK_v/dx = K'(x)$ – identisch mit Grenzkosten, da Konstante wegfällt.

Ökon: Zuwachs der variablen Kosten je zusätzlicher Einheit.

Grenzstückkostenfunktion $k'(x)$

Math: $k'(x) = dk/dx$ – 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.

Ökon: Gibt an, ob Stückkosten steigen oder fallen. $k'(x) = 0 \rightarrow$ Betriebsoptimum (Minimum der Stückkosten).

Grenz-variable-Stückkostenfunktion $k'_v(x)$

Math: $k'_v(x) = dk_v/dx$ – 1. Ableitung der variablen Stückkosten.

Ökon: Gibt an, ob variable Stückkosten steigen oder fallen. $k'_v(x) = 0 \rightarrow$ Betriebsminimum.

Zweite Ableitung Kosten $K''(x)$

Math: $K''(x) = d^2K/dx^2$ – Krümmung der Kostenfunktion.

Ökon: $K''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt der Kostenkurve = Minimum der Grenzkosten. $K'' > 0 \rightarrow$ Grenzkosten steigen, $K'' < 0 \rightarrow$ Grenzkosten fallen.

Dritte Ableitung Kosten $K'''(x)$

Math: $K'''(x) = d^3K/dx^3$ – Vorzeichen prüft ob Wendepunkt wirklich vorliegt.

Ökon: $K'''(x) \neq 0$ bestätigt den Wendepunkt. Bei kubischer K ist K''' eine positive Konstante.

Kostenelastizität $\epsilon_K(x)$

Math: $\epsilon_K(x) = K'(x) \cdot x / K(x)$ – Verhältnis Grenzkosten zu Stückkosten.

Ökon: $\epsilon_K < 1 \rightarrow$ steigende Skalenerträge. $\epsilon_K = 1 \rightarrow$ proportional. $\epsilon_K > 1 \rightarrow$ sinkende Skalenerträge.
Entspricht dem Verhältnis Grenzkosten/Stückkosten.

Erlösfunktion (mengenbezogen) $E(x)$

Math: $E(x) = p(x) \cdot x$ – Preis mal Menge als Funktion von x .

Ökon: Gesamter Umsatz bei einer gegebenen Absatzmenge.

Nachfragefunktion $x(p)$

Math: Umkehrfunktion von $p(x)$ – nach x auflösen.

Ökon: Gibt an, wie viel nachgefragt wird bei einem gegebenen Preis. Fallend: höherer Preis $\rightarrow$ geringere Nachfrage.

Erlösfunktion (preisbezogen) $E(p)$

Math: $E(p) = p \cdot x(p)$ – Erlös als Funktion des Preises.

Ökon: Zeigt wie sich der Gesamtumsatz ändert, wenn der Preis variiert.

Grenzerlösfunktion (mengenbezogen) $E'(x)$

Math: $E'(x) = dE/dx - 1$. Ableitung von $E(x)$.

Ökon: Erlöszuwachs durch eine zusätzliche verkaufte Einheit. $E'(x) = 0 \rightarrow$ Erlösmaximum. Im Monopol gilt im Gewinnmaximum: $E'(x) = K'(x)$.

Grenzerlösfunktion (preisbezogen) $E'(p)$

Math: $E'(p) = dE/dp - 1$. Ableitung von $E(p)$.

Ökon: Erlösänderung bei Preiserhöhung um 1 GE. Negativ $\rightarrow$ Preiserhöhung senkt den Erlös (elastischer Bereich).

Zweite Ableitung Erlös $E''(x)$

Math: $E''(x) = d^2E/dx^2$ – Konstante bei linearer Preis-Absatz-Funktion.

Ökon: $E''(x) < 0$ bestätigt, dass $E'(x) = 0$ ein Maximum ist (konkave Erlösfunktion).

Gewinnfunktion $G(x)$

Math: $G(x) = E(x) - K(x)$ – Differenz Erlös minus Gesamtkosten.

Ökon: Gibt den Gewinn (positiv) oder Verlust (negativ) bei gegebenem Output an.

Grenzgewinnfunktion $G'(x)$

Math: $G'(x) = E'(x) - K'(x) - 1$. Ableitung von $G(x)$.

Ökon: $G'(x) = 0 \rightarrow$ Gewinnmaximum (notwendige Bedingung). Äquivalent: $E'(x) = K'(x)$.

Zweite Ableitung Gewinn $G''(x)$

Math: $G''(x) = d^2G/dx^2$ – Krümmung der Gewinnfunktion.

Ökon: $G''(x) < 0$ an der Stelle $G' = 0$ bestätigt Maximum. $G''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt der Gewinnfunktion.

Dritte Ableitung Gewinn $G'''(x)$

Math: $G'''(x) = d^3G/dx^3$ – prüft ob Wendepunkt vorliegt.

Ökon: $G'''(x) \neq 0$ bestätigt den Wendepunkt der Gewinnkurve.

Deckungsbeitragsfunktion $DB(x)$

Math: $DB(x) = E(x) - K_v(x)$ – Erlös minus variable Kosten.

Ökon: Zeigt, wie viel nach Abzug der variablen Kosten zur Deckung der Fixkosten übrig bleibt. $DB > K_f \rightarrow$ Gewinn.

Grenzdeckungsbeitragsfunktion $DB'(x)$

Math: $DB'(x) = E'(x) - K'_v(x) - 1$. Ableitung von $DB(x)$.

Ökon: Änderung des Deckungsbeitrags je zusätzlicher Einheit. $DB' < 0 \rightarrow$ jede weitere Einheit verschlechtert den Deckungsbeitrag.

Zweite Ableitung Deckungsbeitrag $DB''(x)$

Math: $DB''(x) = d^2DB/dx^2$ – Krümmung der DB-Funktion.

Ökon: $DB'' < 0$ an $DB' = 0$ bestätigt Maximum des Deckungsbeitrags.

Stückdeckungsbeitragsfunktion $db(x)$

Math: $db(x) = DB(x)/x$ – Division des Deckungsbeitrags durch Output.

Ökon: Deckungsbeitrag pro Stück – wie viel trägt jede Einheit zur Fixkostendeckung bei.

Grenzstückdeckungsbeitragsfunktion $db'(x)$

Math: $db'(x) = (DB(x)/x)'$ – Quotientenregel.

Ökon: Änderung des Stückdeckungsbeitrags je zusätzlicher Einheit. $db' < 0 \rightarrow$ Stückdeckungsbeitrag sinkt.

Deckungsbeitragsquote $DBQ(x)$

Math: $DBQ(x) = DB(x)/E(x)$ – Verhältnis DB zu Erlös.

Ökon: Anteil des Erlöses, der zur Fixkostendeckung beiträgt. Je höher, desto profitabler die Produktion.

Deckungsgrad der Fixkosten $DG(x)$

Math: $DG(x) = DB(x)/K_f \cdot 100\%$ – DB relativ zu Fixkosten.

Ökon: $DG < 100\% \rightarrow$ Fixkosten nicht gedeckt (Verlust). $DG = 100\% \rightarrow$ Break-even. $DG > 100\% \rightarrow$ Gewinn.

Preiselastizität (mengenbezogen) $\varepsilon(x)$

Math: $\varepsilon(x) = p(x)/x \cdot 1/p'(x)$ – relative Preisänderung zu relativer Mengenänderung.

Ökon: $|\varepsilon| < 1 \rightarrow$ unelastisch. $|\varepsilon| = 1 \rightarrow$ isoelastisch (Erlösmaximum). $|\varepsilon| > 1 \rightarrow$ elastisch. Negativ wegen fallender Nachfragekurve.

Preiselastizität (preisbezogen) $\varepsilon(p)$

Math: $\varepsilon(p) = x'(p) \cdot p/x(p)$ – direkt als Funktion des Preises.

Ökon: Gleiche Interpretation wie mengenbezogen – nur Perspektive wechselt von Menge zu Preis.

Umsatzelastizität $\varepsilon E(x)$

Math: $\varepsilon E(x) = E'(x) \cdot x/E(x) = 1 + \varepsilon(x)$ – Verhältnis Grenzerlös zu Stückerlös.

Ökon: $\varepsilon E > 0 \rightarrow$ Erlös steigt bei Mengenausdehnung. $\varepsilon E = 0 \rightarrow$ Erlösmaximum. $\varepsilon E < 0 \rightarrow$ Erlös sinkt.

Sparfunktion $S(Y)$

Math: $S(Y) = Y - C(Y)$ – Einkommen minus Konsum.

Ökon: Gibt an, wie viel bei gegebenem Einkommen gespart wird. $S(Y) < 0 \rightarrow$ Entsparen (Konsum > Einkommen).

Marginale Konsumquote $C'(Y)$

Math: $C'(Y) = dC/dY$ – 1. Ableitung der Konsumfunktion.

Ökon: Anteil eines zusätzlichen Einkommens-Euros, der konsumiert wird. $0 < C' < 1$ immer.

Marginale Sparquote $S'(Y)$

Math: $S'(Y) = 1 - C'(Y)$ – Komplement zur Konsumquote.

Ökon: Anteil eines zusätzlichen Einkommens-Euros, der gespart wird. $C' + S' = 1$ immer.

Durchschnittliche Konsumquote $\bar{c}(Y)$

Math: $\bar{c}(Y) = C(Y)/Y$ – Gesamtkonsum relativ zum Einkommen.

Ökon: Fällt mit steigendem Einkommen (wegen Fixkonsum C_0). $\bar{c} > C'$ solange $C_0 > 0$.

Durchschnittliche Sparquote $\bar{s}(Y)$

Math: $\bar{s}(Y) = S(Y)/Y$ – Gesamtersparnis relativ zum Einkommen.

Ökon: Steigt mit wachsendem Einkommen. $\bar{s} < S'$ solange $C_0 > 0$. $\bar{c} + \bar{s} = 1$ immer.

Einkommenselastizität $\varepsilon_Y(Y)$

Math: $\varepsilon_Y(Y) = C'(Y) \cdot Y/C(Y)$ – relatives Verhältnis Konsumzuwachs zu Einkommenszuwachs.

Ökon: $\varepsilon_Y < 1 \rightarrow$ Konsum steigt unterproportional zum Einkommen (normales Gut, Sparen nimmt zu).

Multiplikator m

Math: $m = 1/(1 - C'(Y))$ – Kehrwert der marginalen Sparquote.

Ökon: Gibt an, wie stark eine autonome Nachfrageerhöhung das Volkseinkommen steigert. $m = 1/S'(Y)$. Je kleiner die Sparquote, desto größer der Multiplikator.

Grenzproduktivitätsfunktion $x'(r)$

Math: $x'(r) = dx/dr$ – 1. Ableitung der Produktionsfunktion.

Ökon: Outputzuwachs durch eine zusätzliche Input-Einheit. $x' > 0$ – Durchschnittsproduktivität steigt.

Zweite Ableitung Produktionsfunktion $x''(r)$

Math: $x''(r) = d^2x/dr^2$ – Krümmung der Produktionsfunktion.

Ökon: $x'' > 0 \rightarrow$ steigende Grenzerträge. $x'' = 0 \rightarrow$ Wendepunkt (Maximum der Grenzproduktivität). $x'' < 0 \rightarrow$ fallende Grenzerträge (Gesetz des abnehmenden Ertrags).

Dritte Ableitung Produktionsfunktion $x'''(r)$

Math: $x'''(r) = d^3x/dr^3$ – prüft ob Wendepunkt vorliegt.

Ökon: $x'''(r) \neq 0$ bestätigt Wendepunkt der Produktionsfunktion. Bei kubischer x ist x''' eine Konstante.

Durchschnittsproduktivitätsfunktion $\bar{OP}(r)$

Math: $\bar{OP}(r) = x(r)/r$ – Output je Inputeinheit.

Ökon: Durchschnittlicher Ertrag pro eingesetzter Inputeinheit. Maximum dort wo $\bar{OP} = x'$ (Schnittpunkt mit Grenzproduktivität).

Grenz-Durchschnittsproduktivität $\bar{OP}'(r)$

Math: $\bar{OP}'(r) = (x(r)/r)' - 1$. Ableitung von $\bar{OP}(r)$.

Ökon: $\bar{OP}' > 0 \rightarrow$ Durchschnittsproduktivität steigt. $\bar{OP}' = 0 \rightarrow$ Maximum der Durchschnittsproduktivität. $\bar{OP}' < 0 \rightarrow$ Durchschnittsproduktivität sinkt.

Produktionselastizität $\varepsilon_x(r)$

Math: $\varepsilon_x(r) = x'(r) \cdot r/x(r)$ – relatives Verhältnis Output- zu Inputzuwachs.

Ökon:

$\varepsilon_x > 1 \rightarrow$ steigende Skalenerträge (Output steigt überproportional).

$\varepsilon_x = 1 \rightarrow$ proportional.

$\varepsilon_x < 1 \rightarrow$ sinkende Skalenerträge. Entspricht Verhältnis Grenzproduktivität zu Durchschnittsproduktivität.

MERKBLATT – 25 wichtigste Erkenntnisse der Wirtschaftsmathematik

1. PREISELASTIZITÄT DER NACHFRAGE $\epsilon(x)$

Misst die prozentuale Nachfrageänderung bei 1 % Preisänderung.

$\epsilon = 0 \rightarrow$ vollkommen unelastisch (Nachfrage reagiert gar nicht)

$|\epsilon| < 1 \rightarrow$ unelastisch (Preiserhöhung $\rightarrow$ Erlös steigt)

$|\epsilon| = 1 \rightarrow$ einheitselastisch (Erlösmaximum!)

$|\epsilon| > 1 \rightarrow$ elastisch (Preiserhöhung $\rightarrow$ Erlös sinkt)

$|\epsilon| \rightarrow \infty \rightarrow$ vollkommen elastisch

2. GRENZKOSTEN vs. GRENZERLÖS $\rightarrow$ GEWINNOPTIMUM

Bedingung für maximalen Gewinn:

$K'(x) < E'(x) \rightarrow$ Gewinn steigt $\rightarrow$ Produktion ausweiten

$K'(x) = E'(x) \rightarrow$ **Gewinnmaximum** ($G'(x) = 0$)

$K'(x) > E'(x) \rightarrow$ Gewinn sinkt $\rightarrow$ Produktion reduzieren

3. KOSTENELASTIZITÄT $\epsilon_K(x)$

Misst ob Kosten über- oder unterproportional zum Output steigen.

$\epsilon_K < 1 \rightarrow$ steigende Skalenerträge (Skalenvorteile)

$\epsilon_K = 1 \rightarrow$ proportionale Skalenerträge

$\epsilon_K > 1 \rightarrow$ sinkende Skalenerträge (Skalennachteile)

4. BETRIEBSOPTIMUM UND BETRIEBSMINIMUM

Betriebsoptimum = Minimum der Stückkosten $k(x)$:

$k'(x) = 0$ und $K'(x) = k(x) \rightarrow$ **Betriebsoptimum**

$kv'(x) = 0$ und $K'(x) = kv(x) \rightarrow$ **Betriebsminimum**

$k'(x) < 0 \rightarrow$ Stückkosten sinken noch

$k'(x) = 0 \rightarrow$ minimale Stückkosten $\rightarrow$ günstigster Produktionspunkt

$k'(x) > 0 \rightarrow$ Stückkosten steigen bereits

5. GRENZPRODUKTIVITÄT vs. DURCHSCHNITTSPRODUKTIVITÄT

Verhältnis zeigt ob Durchschnittsproduktivität steigt oder fällt:

$x'(r) > \overline{OP}(r) \rightarrow$ Durchschnittsproduktivität steigt

$x'(r) = \overline{OP}(r) \rightarrow$ **Maximum der Durchschnittsproduktivität**

$x'(r) < \overline{OP}(r) \rightarrow$ Durchschnittsproduktivität sinkt

$x''(r) > 0 \rightarrow$ steigende Grenzerträge

$x''(r) = 0 \rightarrow$ **Maximum der Grenzproduktivität** (Wendepunkt)

$x''(r) < 0 \rightarrow$ fallende Grenzerträge

6. GRENZDECKUNGSBEITRAG $DB'(x)$

Zeigt ob sich eine Produktionsausweitung lohnt:

$DB'(x) > 0 \rightarrow$ Gesamtdeckungsbeitrag steigt $\rightarrow$ Produktion ausweiten

$DB'(x) = 0 \rightarrow$ **Maximum des Deckungsbeitrags**

$DB'(x) < 0 \rightarrow$ Gesamtdeckungsbeitrag sinkt $\rightarrow$ Produktion reduzieren

$DB(x) > K_f \rightarrow$ Fixkosten gedeckt $\rightarrow$ **Gewinnzone**

$DB(x) = K_f \rightarrow$ **Break-even** (Gewinnschwelle)

$DB(x) < K_f \rightarrow$ Fixkosten nicht gedeckt $\rightarrow$ **Verlustzone**

7. GRENZERLÖS $E'(x) \rightarrow$ ERLÖSMAXIMUM

$E'(x) > 0 \rightarrow$ Erlös steigt $\rightarrow$ Absatz ausweiten

$E'(x) = 0 \rightarrow$ **Erlösmaximum** (gleichzeitig: $|\epsilon| = 1$)

$E'(x) < 0 \rightarrow$ Erlös sinkt $\rightarrow$ Absatz reduzieren

Zusammenhang: $E'(x) = p(x) \cdot (1 + 1/\epsilon)$

8. GRENZGEWINN $G'(x)$

$G'(x) > 0 \rightarrow$ Gewinn steigt $\rightarrow$ Produktion ausweiten

$G'(x) = 0 \rightarrow$ **Gewinnmaximum** (notwendige Bedingung)

$G'(x) < 0 \rightarrow$ Gewinn sinkt $\rightarrow$ Produktion reduzieren

$G''(x) < 0 \rightarrow$ hinreichende Bedingung für Maximum bestätigt

$G(x) > 0 \rightarrow$ Gewinnzone

$G(x) = 0 \rightarrow$ Gewinnschwelle (Break-even)

$G(x) < 0 \rightarrow$ Verlustzone

9. MULTIPLIKATOR m

Gibt an um wie viel das Gleichgewichtseinkommen steigt wenn autonome Ausgaben um 1 GE steigen:

$m = 1 / (1 - C'(Y)) = 1 / S'(Y)$

$m > 1$ immer (da $0 < C'(Y) < 1$)

Je höher $C'(Y) \rightarrow$ desto größer $m \rightarrow$ stärkerer Multiplikatoreffekt

Je höher $S'(Y) \rightarrow$ desto kleiner $m \rightarrow$ schwächerer Multiplikatoreffekt

$C'(Y) + S'(Y) = 1$ (immer)

10. PRODUKTIONSELASTIZITÄT $\epsilon_x(r)$

Misst ob Output über- oder unterproportional zum Faktoreinsatz steigt:

$\epsilon_x > 1 \rightarrow$ steigende Skalenerträge (Output steigt überproportional)

$\epsilon_x = 1 \rightarrow$ proportionale Skalenerträge

$\epsilon_x < 1 \rightarrow$ sinkende Skalenerträge (Output steigt unterproportional)

$\epsilon_x = 0 \rightarrow$ Output reagiert gar nicht auf Faktoreinsatz

Zusammenhang: $\epsilon_x = x'(r) / \bar{O}P(r)$

$\epsilon_x > 1 \leftrightarrow x'(r) > \bar{O}P(r) \leftrightarrow$ Durchschnittsproduktivität steigt

11. STÜCKDECKUNGSBEITRAG $db(x)$

$db(x) > 0 \rightarrow$ jede ME trägt positiv zur Fixkostendeckung bei

$db(x) = 0 \rightarrow$ ME deckt gerade ihre variablen Kosten

$db(x) < 0 \rightarrow$ jede ME verschlechtert die Situation $\rightarrow$ Produktion einstellen

$db'(x) > 0 \rightarrow$ Stückdeckungsbeitrag steigt

$db'(x) = 0 \rightarrow$ **Maximum des Stückdeckungsbeitrags**

$db'(x) < 0 \rightarrow$ Stückdeckungsbeitrag sinkt

12. DECKUNGSBEITRAGSQUOTE $DBQ(x)$

$DBQ = DB(x) / E(x)$

DBQ hoch $\rightarrow$ großer Anteil des Erlöses verbleibt nach Abzug variabler Kosten

DBQ niedrig $\rightarrow$ hohe variable Kosten fressen den Erlös auf

$DBQ = 1 \rightarrow$ keine variablen Kosten (unrealistisch)

$DBQ = 0 \rightarrow$ Erlös deckt gerade die variablen Kosten

13. DECKUNGSGRAD DER FIXKOSTEN $DG(x)$

$DG < 100 \% \rightarrow$ Fixkosten nicht gedeckt $\rightarrow$ Verlust

$DG = 100 \% \rightarrow$ Fixkosten genau gedeckt $\rightarrow$ Break-even

$DG > 100 \% \rightarrow$ Fixkosten überdeckt $\rightarrow$ Gewinn

14. WENDEPUNKT DER KOSTENFUNKTION

$K''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt der Gesamtkostenfunktion

$\rightarrow$ gleichzeitig **Minimum der Grenzkosten** $K'(x)$

$\rightarrow$ Übergang von steigenden zu sinkenden Skalenerträgen

Vor Wendepunkt: $K''(x) < 0 \rightarrow$ Grenzkosten sinken

Nach Wendepunkt: $K''(x) > 0 \rightarrow$ Grenzkosten steigen

15. ZUSAMMENHANG GRENZKOSTEN UND STÜCKKOSTEN

$K'(x) < k(x) \rightarrow$ Stückkosten sinken $\rightarrow$ noch vor Betriebsoptimum

$K'(x) = k(x) \rightarrow$ **Betriebsoptimum** (Minimum der Stückkosten)

$K'(x) > k(x) \rightarrow$ Stückkosten steigen $\rightarrow$ nach Betriebsoptimum

$K'(x) < kv(x) \rightarrow$ variable Stückkosten sinken $\rightarrow$ vor Betriebsminimum

$K'(x) = kv(x) \rightarrow$ **Betriebsminimum** (Minimum der variablen Stückkosten)

$K'(x) > kv(x) \rightarrow$ variable Stückkosten steigen $\rightarrow$ nach Betriebsminimum

16. PROHIBITIVPREIS UND SÄTTIGUNGSMENGE

$p(0) = a \rightarrow$ **Prohibitivpreis** (Preis bei dem Nachfrage = 0)

$p(x) = 0 \rightarrow$ **Sättigungsmenge** (Menge bei der Preis = 0)

Bei linearer PAF $p(x) = a - bx$:

Prohibitivpreis = a

Sättigungsmenge = a/b

17. GRENZERLÖS UND PREISELASTIZITÄT

$E'(x) = p(x) \cdot (1 + 1/\varepsilon)$

$|\varepsilon| > 1 \rightarrow E'(x) > 0 \rightarrow$ Erlös steigt bei Mengenausweitung

$|\varepsilon| = 1 \rightarrow E'(x) = 0 \rightarrow$ **Erlösmaximum**

$|\varepsilon| < 1 \rightarrow E'(x) < 0 \rightarrow$ Erlös sinkt bei Mengenausweitung

18. DURCHSCHNITTliche vs. MARGINALE KONSUMQUOTE

$\bar{c}(Y) > C'(Y)$ immer (wenn autonomer Konsum $C_0 > 0$)

$\bar{c}(Y) \rightarrow C'(Y)$ für $Y \rightarrow \infty$ (asymptotisch)

$\bar{c}(Y) > 1 \rightarrow$ Entsparen (mehr konsumiert als verdient)

$\bar{c}(Y) = 1 \rightarrow$ Break-even ($S = 0$, kein Sparen kein Entsparen)

$\bar{c}(Y) < 1 \rightarrow$ Sparen (Teil des Einkommens wird gespart)

19. SPARFUNKTION UND GLEICHGEWICHTSEINKOMMEN

$S(Y) < 0 \rightarrow$ Entsparen ($Y < Y^*$)

$S(Y) = 0 \rightarrow$ **Gleichgewichtseinkommen** $Y^* = C_0 / S'(Y)$

$S(Y) > 0 \rightarrow$ Sparen ($Y > Y^*$)

$Y^* = C_0 / (1 - C'(Y)) \rightarrow$ Gleichgewichtseinkommen ohne Investitionen

20. UMSATZELASTIZITÄT $\varepsilon_E(x)$

$\varepsilon_E = E'(x) \cdot x / E(x) = 1 + \varepsilon(x)$

$\varepsilon_E > 1 \rightarrow$ Erlös steigt überproportional zur Menge

$\varepsilon_E = 1 \rightarrow$ proportionaler Erlösanstieg

$\varepsilon_E = 0 \rightarrow$ Erlösmaximum ($E' = 0$)

$\varepsilon_E < 0 \rightarrow$ Erlös sinkt bei Mengenausweitung

21. GEWINNSCHWELLEN (BREAK-EVEN)

$G(x) = 0 \rightarrow$ zwei Schnittpunkte = untere und obere Gewinnschwelle

Zwischen beiden Schnittpunkten: **Gewinnzone** Außerhalb: **Verlustzone**

Untere Gewinnschwelle $\rightarrow$ Mindestmenge für Gewinn

Obere Gewinnschwelle $\rightarrow$ Maximalmenge für Gewinn

22. SICHERHEITSABSTAND

$SA = x_{\text{aktuell}} - x_{\text{Break-even}}$

$SA > 0 \rightarrow$ Unternehmen produziert oberhalb der Gewinnschwelle

$SA = 0 \rightarrow$ genau an der Gewinnschwelle

$SA < 0 \rightarrow$ Unternehmen in der Verlustzone

Je größer SA $\rightarrow$ desto sicherer die Gewinnsituation

23. PRODUKTIONSFUNKTION – PHASEN

Phase 1: $x''(r) > 0 \rightarrow$ steigende Grenzerträge (vor Wendepunkt)

Phase 2: $x''(r) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt = **Maximum der Grenzproduktivität**

Phase 3: $x''(r) < 0, x'(r) > 0 \rightarrow$ fallende Grenzerträge (nach Wendepunkt)

Phase 4: $x'(r) = 0 \rightarrow$ **Maximum des Outputs**

Phase 5: $x'(r) < 0 \rightarrow$ negativer Grenzertrag $\rightarrow$ Überdüngung / Überbelegung

24. EINKOMMENSELASTIZITÄT $\epsilon_Y(Y)$

$\epsilon_Y < 1 \rightarrow$ Konsum steigt unterproportional zum Einkommen $\rightarrow$ **normales Gut, notwendig**

$\epsilon_Y = 1 \rightarrow$ Konsum steigt proportional

$\epsilon_Y > 1 \rightarrow$ Konsum steigt überproportional $\rightarrow$ **Luxusgut**

$\epsilon_Y < 0 \rightarrow$ Konsum sinkt bei steigendem Einkommen $\rightarrow$ **inferiores Gut**

25. COURNOT-PUNKT

Schnittpunkt $E'(x) = K'(x) \rightarrow$ **gewinnmaximale Menge**

Zugehöriger Preis aus $p(x)$ einsetzen $\rightarrow$ **gewinnmaximaler Preis**

Unterhalb Cournot-Punkt: $G' > 0 \rightarrow$ Gewinn steigt

Im Cournot-Punkt: $G' = 0 \rightarrow$ Gewinnmaximum

Oberhalb Cournot-Punkt: $G' < 0 \rightarrow$ Gewinn sinkt

Merksatz für die Einheiten:

Grenzwerte (Ableitungen nach x): **GE/ME**

Grenzwerte (Ableitungen nach r): **ME/ME**

Zweite Ableitungen Produktion: **ME/ME²**

Zweite Ableitungen Stückgrößen: **GE/ME²**

Gesamtgrößen (nicht geteilt): **GE**

Elastizitäten, Quoten, Multiplikator: **dimensionslos**

Grenzerlös preisbezogen: **ME** (Mengenänderung pro Preisänderung)

Die ökonomische Logik mathematischer Funktionen

Typische Funktionsformen, ökonomische Begründungen und
Plausibilitätsbedingungen

$p(x)$ – Preis-Absatz-Funktion

Typische Form: $p(x) = a - b \cdot x$ ($a, b > 0$)

Ökonomische Bedeutung: Je größer die Absatzmenge, desto niedriger ist in der Regel der erzielbare Preis (Gesetz der Nachfrage).

Warum negative Steigung?

Eine steigende Funktion wäre ökonomisch unplausibel, da bei wachsender Menge der Preis steigen würde.

Beispiel: $p(x) = 100 + 0,5x \rightarrow$ bei $x=10$: 105, bei $x=20$: 110 (widerspricht dem Nachfragegesetz)

$C(Y)$ – Konsumfunktion

Typische Form: $C(Y) = C_0 + c \cdot Y$ ($0 < c < 1$)

Mehr Einkommen führt zu mehr Konsum, aber nicht alles wird konsumiert (Sparen).

c ist die marginale Konsumquote und muss zwischen 0 und 1 liegen.

$K(x)$ – Gesamtkostenfunktion

Typische Form: $K(x) = a x^3 - b x^2 + c x + d$ ($a > 0$)

Kosten steigen langfristig stark an. Ein negativer Leitkoeffizient wäre unmöglich, da Kosten sonst gegen $-\infty$ gehen würden.

$x(r)$ – Produktionsfunktion

Typische Form: $x(r) = -a r^3 + b r^2 + c r$ ($a > 0$)

Output hat ein Maximum, da Ressourcen und Kapazitäten begrenzt sind.

$E(x)$ – Erlösfunktion

Typische Form: $E(x) = p(x) \cdot x$

Bei linearer Preis-Absatz-Funktion entsteht eine Parabel mit Maximum.

G(x) – Gewinnfunktion

Typische Form: $G(x) = E(x) - K(x)$

Gewinn entsteht aus der Differenz von Erlösen und Kosten und besitzt typischerweise ein Maximum.

DB(x) – Deckungsbeitrag

Typische Form: $DB(x) = E(x) - K_v(x)$

Zeigt, wie viel zur Deckung der Fixkosten beiträgt.

Elastizitäten

Typische Form: $\varepsilon = f'(x) \cdot x / f(x)$

Misst relative Änderungen in Prozent.

Grenzfunktionen

Typische Form: $f'(x)$

Beschreibt die Wirkung einer zusätzlichen Einheit.

Zweite Ableitung

Typische Form: $f''(x)$

Zeigt Beschleunigung oder Abbremsung einer Entwicklung.

Vollständige Herleitung ökonomischer Funktionen mit Beispielrechnung

Vollständige Funktionenliste mit Ergebnissen

$$K(x) = 0,06x^3 - x^2 + 50x + 400 \quad | \quad x(r) = -(1/60)r^3 + (5/4)r^2 + 3r \quad | \quad p(x) = -0,4x + 150 \quad | \quad C(Y) = 0,2Y + 1000$$

Nr.	Begriff	Allgemeine Formel	Konkretes Ergebnis
A – KOSTENFUNKTIONEN			
1	Fixkosten	$K_f = K(0)$	400 GE
2	Variable Kostenfunktion	$K_v(x) = K(x) - K(0)$	$0,06x^3 - x^2 + 50x$
3	Stückkostenfunktion	$k(x) = K(x) / x$	$0,06x^2 - x + 50 + 400/x$
4	Variable Stückkostenfunktion	$kv(x) = K_v(x) / x$	$0,06x^2 - x + 50$
5	Grenzkostenfunktion	$K'(x) = (K(x))'$	$0,18x^2 - 2x + 50$
6	Grenzkosten variabel	$K_v'(x) = (K_v(x))'$	$0,18x^2 - 2x + 50$
7	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x) = (K(x)/x)'$	$0,12x - 1 - 400/x^2$
8	Grenz-variable-Stückkosten	$kv'(x) = (K_v(x)/x)'$	$0,12x - 1$
9	Zweite Ableitung Kosten	$K''(x) = (K'(x))'$	$0,36x - 2$
10	Dritte Ableitung Kosten	$K'''(x) = (K''(x))'$	0,36
11	Kostenelastizität	$\varepsilon K(x) = K'(x) \cdot x / K(x)$	$(0,18x^3 - 2x^2 + 50x) / (0,06x^3 - x^2 + 50x + 400)$
B – ERLÖSFUNKTIONEN			
12	Erlösfunktion (mengenbez.)	$E(x) = p(x) \cdot x$	$-0,4x^2 + 150x$
13	Nachfragefunktion	$x(p)$ aus $p(x)=p$ lösen	$-2,5p + 375$
14	Erlösfunktion (preisbez.)	$E(p) = p \cdot x(p)$	$-2,5p^2 + 375p$
15	Grenzerlös (mengenbez.)	$E'(x) = (E(x))'$	$-0,8x + 150$
16	Grenzerlös (preisbez.)	$E'(p) = (E(p))'$	$-5p + 375$
17	Zweite Ableitung Erlös	$E''(x) = (E'(x))'$	-0,8
C – GEWINNFUNKTIONEN			
18	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$	$-0,06x^3 + 0,6x^2 + 100x - 400$
19	Grenzgewinnfunktion	$G'(x) = (G(x))'$	$-0,18x^2 + 1,2x + 100$
20	Zweite Ableitung Gewinn	$G''(x) = (G'(x))'$	$-0,36x + 1,2$
21	Dritte Ableitung Gewinn	$G'''(x) = (G''(x))'$	-0,36
D – DECKUNGSBEITRAGSRECHNUNG			
22	Deckungsbeitragsfunktion	$DB(x) = E(x) - K_v(x)$	$-0,06x^3 + 0,6x^2 + 100x$
23	Grenzdeckungsbeitrag	$DB'(x) = (DB(x))'$	$-0,18x^2 + 1,2x + 100$
24	Zweite Ableitung DB	$DB''(x) = (DB'(x))'$	$-0,36x + 1,2$
25	Stückdeckungsbeitrag	$db(x) = DB(x) / x$	$-0,06x^2 + 0,6x + 100$
26	Grenzstückdeckungsbeitrag	$db'(x) = (db(x))'$	$-0,12x + 0,6$
27	Deckungsbeitragsquote	$DBQ(x) = DB(x)/E(x)$	$(-0,06x^3 + 0,6x^2 + 100x) / (-0,4x^2 + 150x)$
28	Deckungsgrad Fixkosten	$DG(x) = DB(x)/K(0) \cdot 100 \%$	$-0,015x^3 + 0,15x^2 + 25x \text{ [%]}$
E – ELASTIZITÄTEN			
29	Preiselastizität (mengenbez.)	$\varepsilon(x) = p(x)/x \cdot 1/p'(x)$	$1 - 375/x$
30	Preiselastizität (preisbez.)	$\varepsilon(p) = x'(p) \cdot p/x(p)$	$-2,5p / (-2,5p + 375)$
31	Umsatzelastizität	$\varepsilon E(x) = E'(x) \cdot x/E(x)$	$(-0,8x + 150) / (-0,4x + 150)$
32	Kostenelastizität	$\varepsilon K(x) = K'(x) \cdot x/K(x)$	$(0,18x^3 - 2x^2 + 50x) / (0,06x^3 - x^2 + 50x + 400)$

F – KONSUM- UND SPARTHEORIE			
33	Sparfunktion	$S(Y) = Y - C(Y)$	$0,8Y - 1000$
34	Marginale Konsumquote	$C'(Y) = (C(Y))'$	0,2
35	Marginale Sparquote	$S'(Y) = 1 - C'(Y)$	0,8
36	Durchschn. Konsumquote	$\bar{c}(Y) = C(Y)/Y$	$0,2 + 1000/Y$
37	Durchschn. Sparquote	$\bar{s}(Y) = S(Y)/Y$	$0,8 - 1000/Y$
38	Einkommenselastizität	$\varepsilon_Y(Y) = C'(Y) \cdot Y/C(Y)$	$0,2Y / (0,2Y + 1000)$
39	Multiplikator	$m = 1/(1-C'(Y))$	1,25
G – PRODUKTIONSFUNKTION			
40	Grenzproduktivität	$x'(r) = (x(r))'$	$-(1/20)r^2 + (5/2)r + 3$
41	Zweite Ableitung	$x''(r) = (x'(r))'$	$-(1/10)r + 5/2$
42	Dritte Ableitung	$x'''(r) = (x''(r))'$	-0,1
43	Durchschnittsproduktivität	$\bar{O}P(r) = x(r)/r$	$-(1/60)r^2 + (5/4)r + 3$
44	Grenz-Durchschnittsprodukt.	$\bar{O}P'(r) = (\bar{O}P(r))'$	$-(1/30)r + 5/4$
45	Produktionselastizität	$\varepsilon_x(r) = x'(r) \cdot r/x(r)$	$(-0,05r^3 + 2,5r^2 + 3r) / (-0,0167r^3 + 1,25r^2 + 3r)$